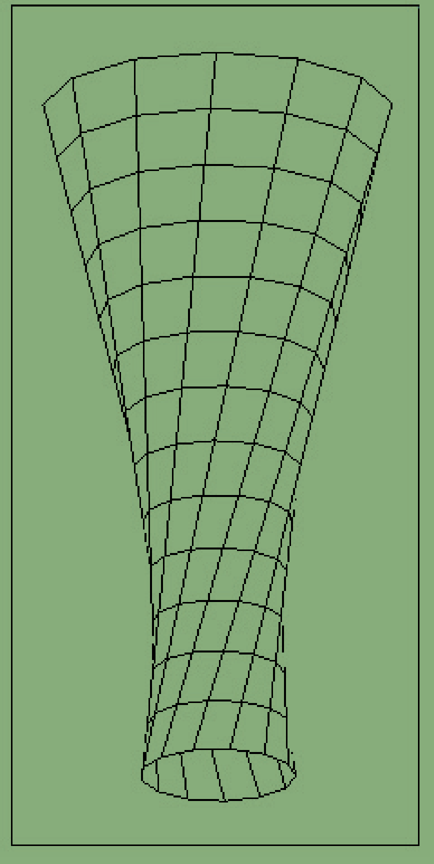
CUESTIONES DE FORMA Y TRAZADO

EN LAS SUPERFICIES REGLADAS

por

RAMÓN J. ZOIDO





CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

3-53-04

CUESTIONES DE FORMA Y TRAZADO

EN LAS SUPERFICIES REGLADAS

por

RAMÓN J. ZOIDO

CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

3-53-04

C U A D E R N O S
D E L   I N S T I T U T O
J U A N   D E   H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Cuestiones de forma y trazado en las superficies regladas.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 382.01 / 3-53-04
ISBN-13: 978-84-9728-434-9
Depósito Legal: M-34029-2012

Este texto explora las posibilidades creativas y constructivas de la geometría diferencial orientado a sus aplicaciones en el campo de la arquitectura, la ingeniería o el diseño en general. Se abordan ciertas cuestiones de forma de superficies regladas significativas y algunas de las reglas para sus trazados geométricos. Aunque previamente se hace un breve repaso de algunas cuestiones básicas imprescindibles para el desarrollo del texto, es conveniente haber conocido el cálculo y la utilización de los coeficientes de la primera y segunda fórmula cuadrática fundamentales así como toda la teoría cualitativa de los puntos regulares de estas superficies. La lectura se facilita si se ha manejado holgadamente la generación paramétrica de las superficies regladas en sus formulaciones propias o "constructivas" así como el cálculo de la línea de estricción y las parametrizaciones intrínsecas.

Como en otras publicaciones se ha dado la mayor importancia a las ilustraciones que son las que nos permiten comprender mejor las ideas expuestas. En un trabajo de estas características es inevitable la aparición de erratas o imprecisiones que se irán corrigiendo en revisiones posteriores.

Ramón Zoido
Septiembre 2011

CUESTIONES DE FORMA Y TRAZADOS
EN LAS SUPERFICIES REGLADAS

§ 1.- Introducción

Desde el punto de vista constructivo y a partir de la aparición de los colados de hormigón armado a principios del siglo XX, en los modelos físicos asimilables a los objetos geométricos denominados en general bóvedas, cascarones o, en su caso, "cascarones delgados" hay una gran diferencia entre los que siguen modelos comparables a superficies regladas y los que no. En la construcción estandarizada o sistemática de cascarones tanto como elementos de cubrición como de revestimiento se hace crítica esta distinción ya que podemos generar una infinidad de moldes para una infinita variedad de modelos equiparables a superficies con los mismos elementos básicos: los tablones que substituyen a las rectas ideales de las superficies regladas. Es así como sin olvidar otras formas de generación de superficies curvadas como las de rotación o traslación el estudio de las superficies regladas debe ser considerado preferente tanto en los estudios relacionados con la ingeniería y la arquitectura como con el diseño en general de objetos curvados.

Desde un punto de vista elástico-resistente es la curva del arco lo que permite sustituir a la recta del dintel y la superficie curvada lo que puede sustituir a la placa plana. En ambos casos, la forma es el factor determinante y hablar de "forma" en una superficie regular es, básicamente, hablar de la curvatura de Gauss, un concepto local con el que podemos abordar la complejidad formal de un fragmento amplio de superficie como suma de simplicidades bien punto a punto o región a región cualitativamente semejantes. Teniendo en cuenta la prelación de las superficies regladas citada antes, nos interesamos preferentemente por la estructura de la forma en este tipo de superficies comprobando, por ejemplo, que, en principio, están excluidos los puntos o regiones de tipo elíptico y los complejos puntos umbilicales. Esta ausencia del paisaje elíptico en este tipo de superficies simplifica sensiblemente el análisis. Además, la forma en las regladas se caracteriza más por rectas –generatrices– que por puntos por lo que, aparte de la posible existencia de puntos planos aislados, no estamos interesados más que en calificar las rectas indivisiblemente, destacando que, en las (regladas) alabeadas hay dos únicos tipos de generatrices que pueden coexistir. Si se considera aparte el caso de las desarrollables donde todas son del mismo tipo, nos interesamos por la estructura de la forma en el resto de superficies regladas donde normalmente son excepcionales las rectas generatrices "cilíndricas" frente a las de tipo hiperbólico. Las primeras están muy vinculadas a la línea de estricción con la que tienen básicamente relación de tangencia –si ampliamos este concepto a sus posibles puntos de retroceso– y son líneas que podríamos denominar de fragilidad formal, es decir: la superficie en general de doble curvatura se comporta localmente a lo largo de ellas como si fuera una desarrollable –de curvatura nula o simple–. Podríamos considerar que en este tipo de superficies "anticlásticas" coexisten líneas "de arco" y excepcionalmente líneas "de dintel".

Después de un recorrido muy básico por cuestiones generales, abordaremos aquí aspectos del análisis de la forma de una selección de superficies regladas alabeadas significativas. Algunas son muy notorias y otras menos conocidas pero todas son representativas de las múltiples posibilidades dentro de la generación de superficies. No olvidaremos citar algunos de los métodos geométricos de su trazado u otros aspectos notables de su replanteo constructivo que es también uno de los objetivos de este texto.

§ 2.- Acerca de las superficies parametrizadas

§ 2.01.- Generalidades sobre las superficies parametrizadas

Para nosotros es suficiente considerar una superficie parametrizada como el conjunto imagen en el espacio afín-euclídeo de la geometría ordinaria $\mathfrak{R}^3$ de una función vectorial, $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{y}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{z}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}$, definida en un dominio $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in \mathbf{U} \subset \mathfrak{R}^2$ con funciones **x, y, z** al menos $\mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ aunque en la práctica trabajaremos con funciones de clase infinito. Con respecto de este punto, resulta que podemos obtener una enorme complejidad formal en muchas superficies parametrizadas haciendo uso de funciones completamente elementales tales como los senos y cosenos circulares o hiperbólicos y los polinomios. Con operaciones sencillas y auxiliados por estas funciones elementales podemos representar con una sola parametrización una cantidad de superficies tan variada, con peculiaridades tan diferentes entre sí y, a veces, tan sorprendentes que, en estas condiciones, se dispone de un campo fácilmente abarcable pero prácticamente ilimitado de generación de este tipo de superficies. Ejemplos ilustrativos pueden ser las superficies de la figura 1 utilizando básicamente las funciones seno y coseno. En la definición, se puede prescindir de cualquier otra característica formal de tal aplicación. Finalmente, el que caractericemos el conjunto **U** como un “abierto” tampoco es demasiado relevante a efectos puramente prácticos aunque sabemos que los bordes de una superficie pueden ser elementos muy determinantes de las mismas.

Nos referiremos siempre a fragmentos de superficies cubiertas con una sola parametrización delimitadas por los valores de los parámetros. Es importante insistir en el hecho de que siempre que hablemos de superficies, se va a estar hablando, en realidad, de regiones finitas, lo que por otra parte es congruente con nuestra propia percepción de estos

objetos dentro del campo de la ingeniería o la arquitectura. Esta restricción evita el estudio de características que afecten a la totalidad de las mismas teniendo en cuenta que en nuestro contexto todo esto no presentan demasiado interés salvo en algunos casos muy concretos. En muchas ocasiones, haremos referencia a la superficie describiendo sólo la función vectorial $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ sin precisar explícitamente el dominio **U** que delimita el fragmento considerado. Debe sobrentenderse siempre la existencia de tal rango de variación de los parámetros que nos permite convertirlo en un objeto susceptible de representación gráfica y de posible "reconstrucción" física del modelo idealizado. Así, reconoceremos, por ejemplo, la parametrización **{u, v, u v}** como un (fragmento dado de) paraboloide hiperbólico o la **{v, u, v cos u}** como un (fragmento dado de) conoide recto.

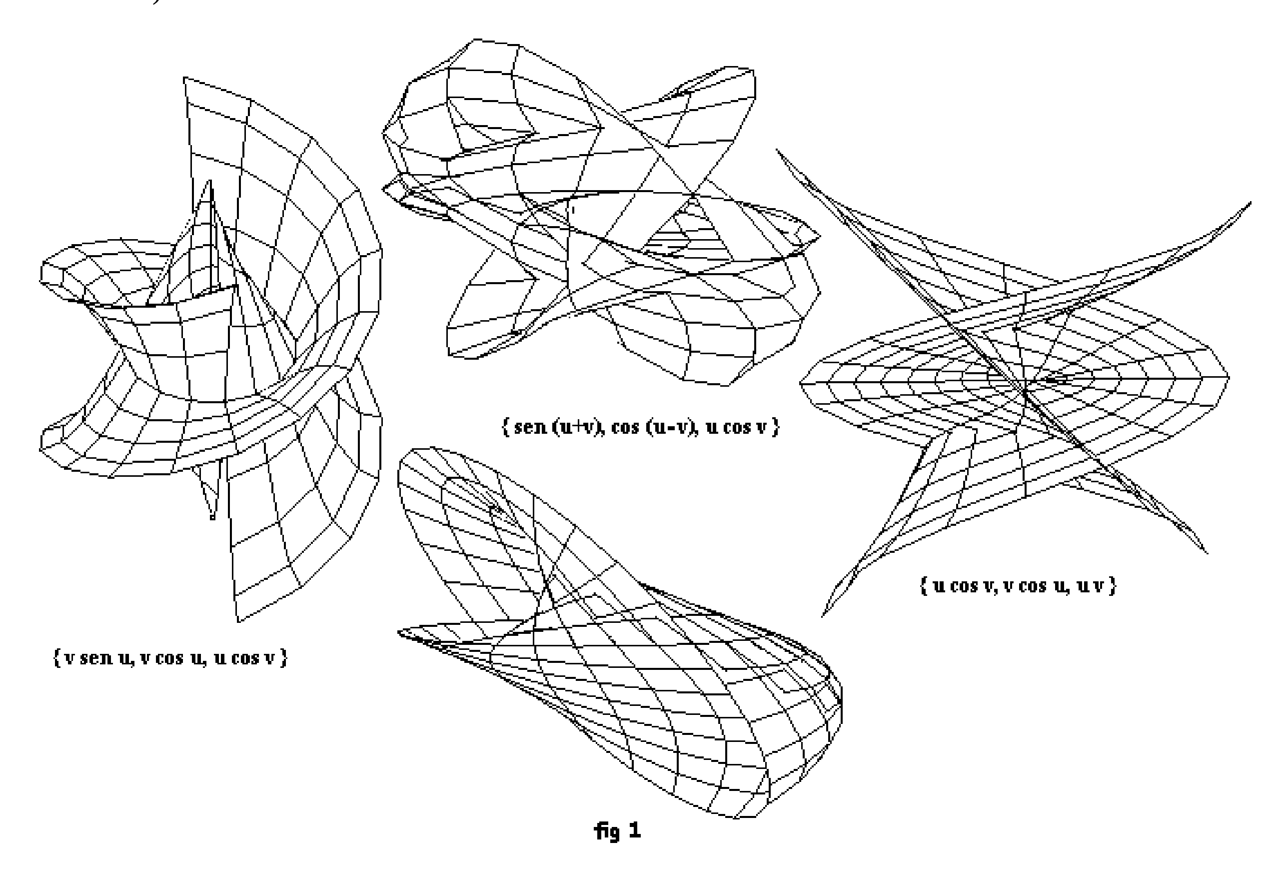


fig 1

Con $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}} = \frac{\partial\, \underline{\mathbf{r}}}{\partial\, \mathbf{u}}$ y $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}} = \frac{\partial\, \underline{\mathbf{r}}}{\partial\, \mathbf{v}}$, los puntos de la superficie en los que $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$ serán los puntos **regulares** de la superficie. De todas las posibles superficies consideradas nos vamos a limitar a aquellas en las que, en el fragmento considerado, exista un número finito de puntos singulares aislados, o bien conjuntos de puntos singulares agrupados a lo largo de un número finito de diferentes líneas. En general, se puede decir que prácticamente todos los conjuntos de puntos de $\mathfrak{R}^3$ en estas condiciones son objeto de nuestro interés y merecen ser denominados "superficies". Estando interesados en lo concerniente al diseño de estos objetos geométricos y en la posible reconstrucción física de modelos asimilables, la presencia de puntos singulares proporciona factores de distinción de gran interés a muchos de ellos y los condicionan no solamente desde el punto de vista matemático sino también desde el punto de vista estético y constructivo.

Aunque dedicaremos posteriormente un espacio para los puntos singulares de las superficies regladas podemos recordar ahora que en una superficie parametrizada cualquiera pueden coexistir dos tipos generales de puntos singulares: aquellos cuyo fundamento es cualitativo, en el sentido de un comportamiento adecuado al objeto definido, que constituirán los puntos singulares "intrínsecos" de la superficie, vinculados a su forma, y aquellos otros consecuencia de la parametrización elegida. En nuestro caso, hablaremos también de singularidades "estructurales" como las intrínsecas consecuencia del procedimiento constructivo. Así la arista de retroceso de las desarrollables sería una línea de singularidades estructurales como también lo serán dos puntos aislados de determinadas cuñas ya que determinan la estructura formal de las mismas. En cuanto a los puntos singulares debido a la formulación paramétrica elegida, se sabe que la elección de una parametrización implica la elección de ciertos conjuntos de líneas que reconstruyen la superficie en $\mathfrak{R}^3$ denominadas "**curvas coordenadas**" y que sirven básicamente de referencia para situar los distintos puntos desde el interior de la propia superficie. Puede ocurrir que una superficie tenga, en algún punto, un comportamiento regular en el sentido de la adecuación al concepto, ser además todas las funciones involucradas en la parametrización de suficiente regularidad, y sin embargo mostrarse como singulares a consecuencia de constituir el punto una anomalía o singularidad de estas familias de curvas vinculadas a la parametrización elegida. Estos puntos se llamarán puntos singulares no intrínsecos de la superficie o, si se quiere, singularidades no vinculadas a su forma consecuencia de la elección de la

parametrización. Existen métodos directos para una distinción cualitativa entre ambos tipos de singularidades pero todo esto queda fuera de nuestro centro de interés porque ocurre que, en lo concerniente a los cálculos, las razones de la singularidad no importan. En la figura 2/a se ha representado como ejemplo un fragmento de superficie reglada con un punto que se muestra como singular debido a la elección de las líneas coordenadas que reconstruyen la superficie, esto es: consecuencia de la elección de la parametrización y en la figura 2/b el mismo fragmento de la misma superficie en torno al mismo punto, representado en su "parametrización reglada", en el que no existen singularidades y, además, una de las familias de curvas coordenadas coincide con las generatrices lo que muestra, explícitamente, su carácter reglado.

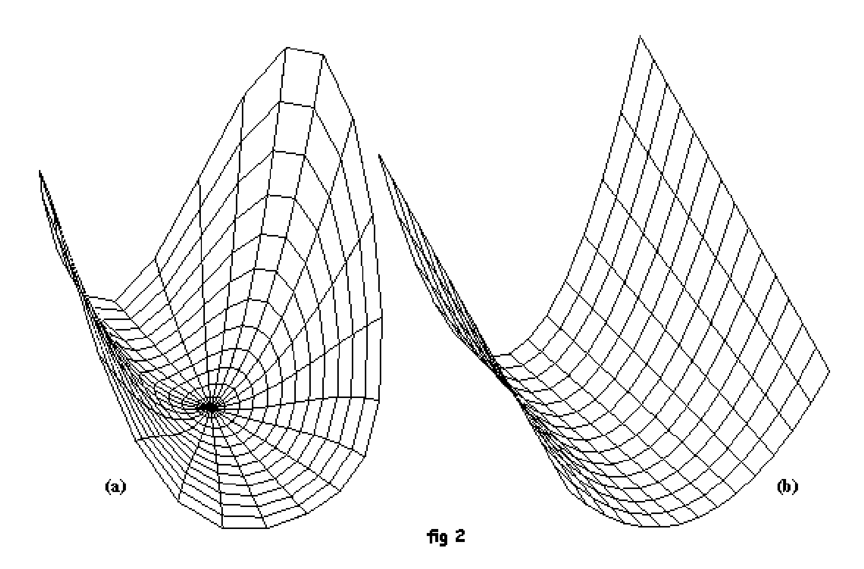


fig 2

Finalmente, se puede añadir que las nuevas herramientas tecnológicas que hacen posible, con extraordinaria facilidad, representar gráficamente y visualizar espacialmente objetos tridimensionales, ha permitido que volvamos a revisar de otra manera problemas –como el de la propia parametrización de las superficies– con mucha mayor claridad, y podamos centrarnos en algunos detalles cuya explicación analítica puede resultar bastante más onerosa. Sobre cualquier representación gráfica de una superficie parametrizada podemos, por ejemplo, acercarnos con procedimientos informáticos para visualizar la desviación entre un entorno de la superficie alrededor de un punto y un fragmento de su plano tangente lo que permite incorporar estos medios auxiliares al puro análisis cualitativo. Para el conocimiento instrumental de las superficies de las que estamos hablando, no se puede seguir, facilitado, por la inercia académica, en una descripción de la geometría diferencial puramente formulista puesta a punto cuando se carecía de estas facilidades de visualización. Estas herramientas de representación pueden incluso tener preferencia sobre otros formalismos que pueden tener un campo minoritario de interés. Ponen al alcance medios poderosos no sólo para el análisis sino también para la creatividad, lo que a su vez puede proporcionar nuevos objetos, nuevos análisis y nuevos problemas a considerar.

§ 2.02.- Cuestiones de forma en las superficies parametrizadas

El segundo nivel de derivación de las superficies parametrizadas $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{y}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{z}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}$ es el que nos proporciona los vectores $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uu}} = \dfrac{\partial^2 \underline{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{u}^2}$, $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uv}} = \dfrac{\partial^2 \underline{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{u}\, \partial \mathbf{v}} = \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{vu}}$, $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{vv}} = \dfrac{\partial^2 \underline{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{v}^2}$, y, **c**omo se sabe, la caracterización de la forma en un punto de una superficie parametrizada depende de los valores de los tres productos mixtos:

$$\mathbf{e^*} = (\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uu}}, \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}}),\ \ \mathbf{f^*} = (\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uv}}, \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}}),\ \ \mathbf{g^*} = (\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{vv}}, \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}})$$

o sea, los valores de los determinantes:

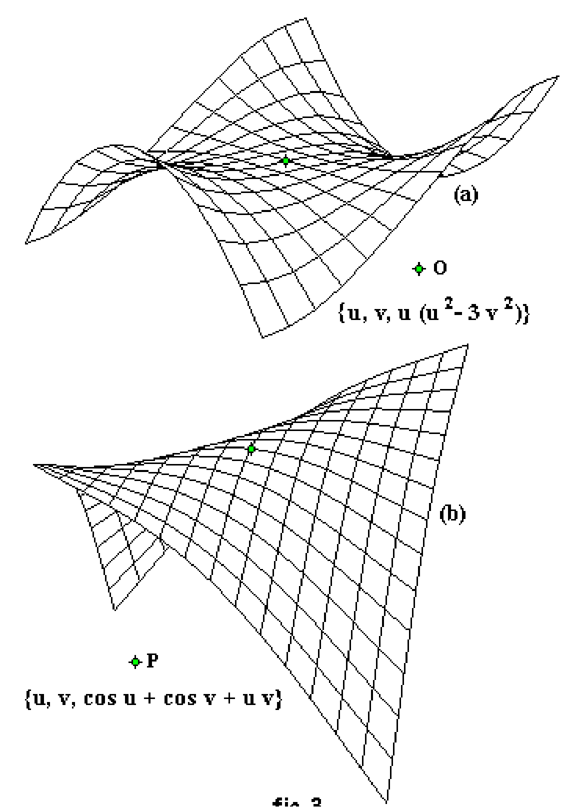
$$\mathbf{e^*} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}^2} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{v}} \end{vmatrix},\ \ \mathbf{f^*} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}\,\partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}\,\partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}\,\partial \mathbf{v}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{v}} \end{vmatrix},\ \ \mathbf{g^*} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{v}^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial \mathbf{v}^2} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{v}} & \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{v}} \end{vmatrix}$$

y particularmente del valor que tome en el punto la función de forma $\mathbf{h^*(u, v) = e^*\, g^* - f^{*2}}$, clasificándose los puntos regulares en **elípticos**, **hiperbólicos** o **parabólicos** según que este valor sea positivo negativo o nulo y, en su caso en **umbílicales** –previamente elípticos– si se verifica, además, la proporción $\dfrac{\mathbf{e^*}}{\mathbf{E}} = \dfrac{\mathbf{f^*}}{\mathbf{F}} = \dfrac{\mathbf{g^*}}{\mathbf{G}}$, siendo **E**, **F**, **G**, los coeficientes de la primera forma cuadrática fundamental:

$$\mathbf{E} = \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}\ ,\ \ \mathbf{F} = \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}}\ ,\ \ \mathbf{G} = \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}}\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}}\ ,$$

o bien en puntos **planos** cuando $\mathbf{e^* = f^* = g^* = 0}$. La complejidad de la forma de las superficies depende de la suma de sus características locales punto a punto o de la asociación de regiones de características diferentes con la peculiaridad de que pequeñas variaciones en esta distribución cualitativa de puntos reproducen objetos totalmente diferentes. La presencia de un solo punto plano aislado en una hoja de puntos hiperbólicos determina el fragmento característico de una "silla de

mono" (figura 3/a), punto por el que, además, pasan tres rectas todas ellas contenidas en la superficie y la sola presencia de un punto parabólico aislado en una región de puntos hiperbólicos (figura 3/b) condiciona la forma de ese fragmento.



La regularidad de las funciones involucradas proporcionan algunas reglas sencillas para la distribución de regiones con características comunes o para la posible presencia de puntos aislados con características diferentes a las de su entorno. En este mismo contexto, además de la coexistencia de puntos parabólicos –o planos– aislados en una región toda ella de puntos elípticos o hiperbólicos, destaca por ejemplo la imposibilidad de existencia de puntos umbilicales en regiones de puntos hiperbólicos. Finalmente, como consecuencia directa de la continuidad de **h*** se desprende la necesaria existencia de líneas frontera de puntos parabólicos –también llamadas "líneas nodales"– separando las regiones de puntos elípticos de las de puntos hiperbólicos. En algunos fragmentos aparecen, además de los tradicionales puntos umbílicos aislados, otras líneas todas ellas de puntos umbilicales (figura 4).

§ 3.- Acerca de las superficies regladas parametrizadas

§ 3.01.- Generalidades sobre las superficies regladas parametrizadas

Una definición tradicional de una superficie reglada es la de una superficie tal que por cada punto de la misma pasa al menos una recta que está toda ella contenida en la superficie. Como veremos en el **§ 4** una tal definición deja fuera algunos objetos que, en su totalidad, deben de ser considerados como superficies regladas por lo que si queremos integrarlos habrá que permitir algunas anomalías locales en lo que se refiere al comportamiento de las rectas. Lo que resulta imprescindible es contemplar la superficie reglada como un conjunto simple de rectas en $\Re^3$ dependientes de un parámetro exigiendo ciertas condiciones adicionales de regularidad a las funciones que nos permiten su representación paramétrica aunque aceptando con un criterio holgado que, por razones constructivas, estas rectas puedan localmente convertirse en un punto. Como se sabe, cada una de estas rectas constituyen lo que venimos denominando **generatrices** de la superficie reglada. También se puede contemplar la superficie como el lugar geométrico generado por una sola recta

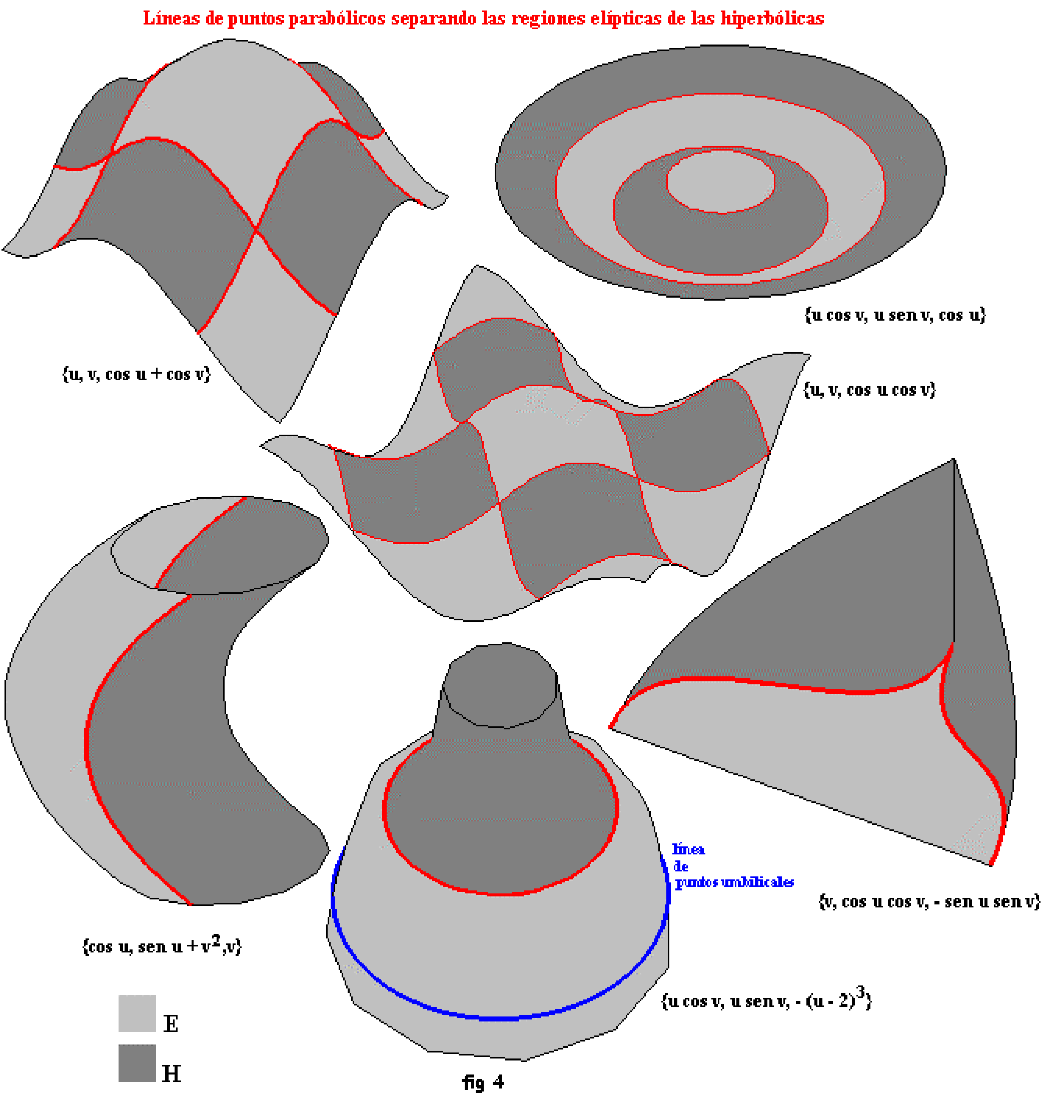


fig 4

que va modificando su lugar en el espacio, tomando diferentes posiciones al variar, de forma regular, un solo parámetro pero que eventualmente en alguna de sus posiciones, la recta pueda localmente reducirse a un punto.

Siendo $\mathbf{x = a + v\ \alpha}$, $\mathbf{y = b + v\ \beta}$, $\mathbf{z = c + v\ \gamma}$, con $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq \mathbf{0}$, las ecuaciones cartesianas de una recta que pasa por el punto **(a, b, c)** y cuya dirección es la del vector $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, la parametrización propia de tal recta podrá escribirse: $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{v}) = \{\mathbf{a + v\ \alpha, b + v\ \beta, c + v\ \gamma}\} = (\mathbf{a, b, c}) + \mathbf{v}\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$, en la que debe ser $\{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \mathbf{0}$. Para distinguir cualitativamente el punto de la dirección adoptaremos esta notación "**( )**" y "**{ }**" aunque con ambas ternas se efectúen las operaciones usuales de suma o diferencia vectorial. Podremos, además, utilizar indistintamente la notación "**( )**" –conjunto de puntos imagen de $\underline{\mathbf{r}}$ – o bien escribiremos "**{ }**" para el resultado de la suma cuando la hacemos preceder del vector $\underline{\mathbf{r}}$. Es decir: $(\mathbf{a + v\ \alpha, b + v\ \beta, c + v\ \gamma})$ o bien " $\underline{\mathbf{r}} = \{\mathbf{a + v\ \alpha, b + v\ \beta, c + v\ \gamma}\}$.

La descripción analítica de una superficie reglada deberá poder ser, congruentemente con lo anterior, la de un conjunto de rectas dependientes de un solo parámetro $\mathbf{u} \in \mathbf{I} \subset \Re$, resultando las ecuaciones cartesianas:

$$\mathbf{x = x(u) + v\ \alpha(u)}, \qquad \mathbf{y = y(u) + v\ \beta(u)}, \qquad \mathbf{z = z(u) + v\ \gamma(u)},$$

o sea, la representación vectorial:

$$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u, v}) = (\mathbf{a(u), b(u), c(u)}) + \mathbf{v}\ \{\alpha(\mathbf{u}), \beta(\mathbf{u}), \gamma(\mathbf{u})\} = \underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u}),$$

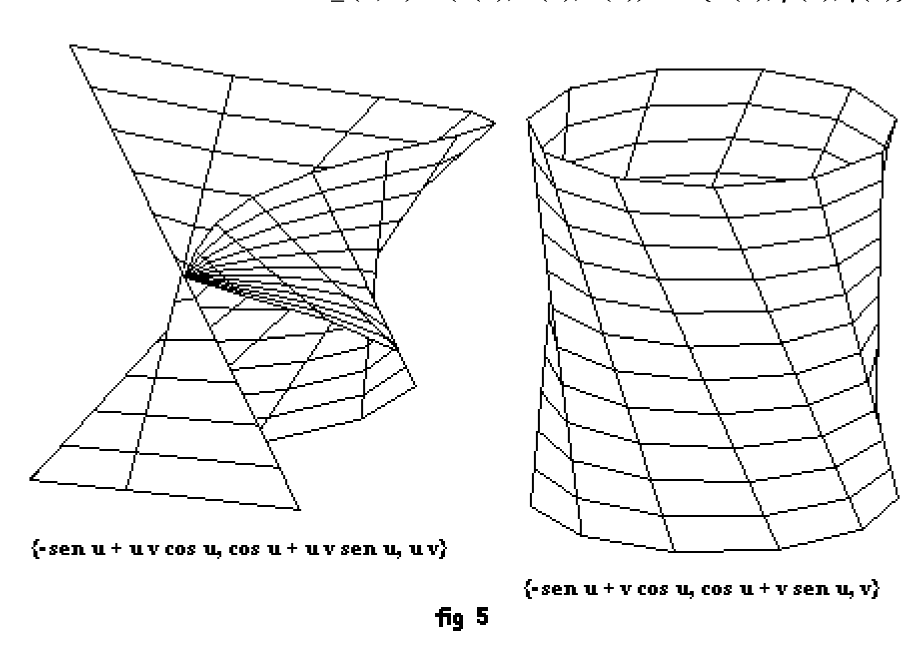


fig 5

en la que $\alpha(\mathbf{u})^2 + \beta(\mathbf{u})^2 + \gamma(\mathbf{u})^2 \neq \mathbf{0}$ salvo excepcionalmente, en un número finito de puntos donde esta condición no se verifique por causas intrínsecas. Esta última precisión es necesario hacerla ya que puede ser tomada cualquiera de las direcciones equivalentes de $\underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u})$ para describir el mismo objeto así que interesa que esta excepción no se produzca por la inadecuada elección de la dirección de las generatrices como ocurre, por ejemplo, al escribir el hiperboloide alabeado en la forma
(–sen u, cos u, 0) + v { u cos u, u sen u, u},
en vez de hacerlo en la forma:
(–sen u, cos u, 0) + v **{cos u, sen u, 1}**,
ambas formulaciones pueden representar fragmentos del mismo objeto pero en el primer caso, la dirección de la generatriz en el punto $\mathbf{u = 0}$ no está definida o, si se quiere, la generatriz se convierte en un punto (figura 5).Esta resulta una singularidad, consecuencia de la formulación y es por lo tanto artificial aunque en algún caso nos pueda permitir reconstruir objetos con algún interés. Aquí descartamos, sin embargo, su utilización eventual. El uso de la dirección equivalente unitaria impide estas posibles representaciones que, en general, son poco adecuadas y, además, puede ayudar notablemente en las cuestiones teóricas, pero no es relevante a efectos puramente prácticos e introduce cálculos más laboriosos, así que, en este contexto, trataremos siempre de simplificar la función $\underline{\mathbf{d}}$ utilizando el vector equivalente más sencillo $\underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$, pero evitando, en la medida de lo posible el uso del unitario.

Esta parametrización manifiesta explícitamente el carácter reglado de la superficie reglada por lo que es denominada una "**parametrización reglada**" o "**parametrización propia**" de la superficie reglada que, como ecuación vectorial de una recta variable en $\Re^3$, resulta ser una expresión lineal en uno de los parámetros, en nuestro caso el "**v**". Eligiendo, si se quiere, la forma "continua" para tal representación, la superficie podría describirse simplemente por el conjunto de rectas: $\dfrac{\mathbf{x - x(u)}}{\alpha(\mathbf{u})} = \dfrac{\mathbf{y - y(u)}}{\beta(\mathbf{u})} = \dfrac{\mathbf{z - z(u)}}{\gamma(\mathbf{u})}$. Recíprocamente, toda superficie que pueda representarse en la forma $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u, v}) = \underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u})$ constituye, trivialmente, la ecuación de una recta variable dependiente del parámetro "**u**", por lo que representa una superficie reglada, así que esta parametrización resulta privativa de estas superficies.

Esta formulación o representación "reglada" nos permite contemplar la superficie como un lugar geométrico generado por rectas –generatrices– de dirección variable $\underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u})$ que "se apoyan", "pasan" o "cortan" a una curva $\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u})$ a lo largo de sus correspondientes puntos. Manifiesta analíticamente una versión "constructiva" de estas superficies que

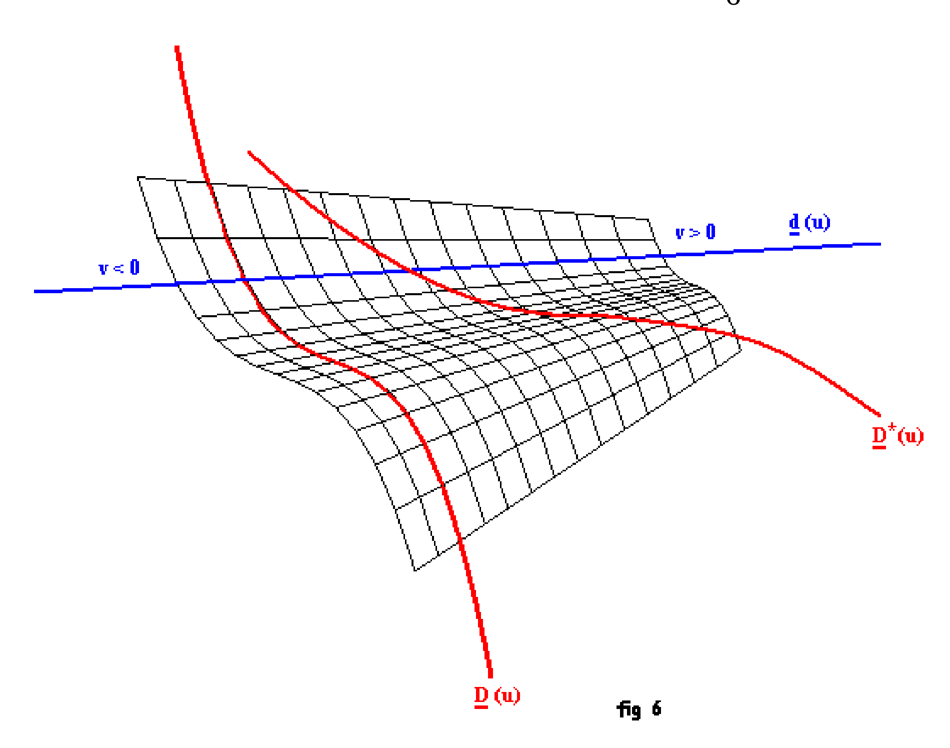


fig 6

consiste en elegir una línea $\underline{\mathbf{D}}$ **(u)** que llamamos **directriz** y definir la dirección de las rectas generatrices $\underline{\mathbf{d}}$ **(u)**, ligadas ambas funciones en la ecuación vectorial por el parámetro lineal "**v**". Desde este punto de vista, las funciones vectoriales, del mismo parámetro $\underline{\mathbf{D}}$ y $\underline{\mathbf{d}}$ muestran un papel cualitativamente diferente en la superficie, ya que la primera representa una línea en tanto la segunda es la dirección de una recta, de manera que cualquier otro vector equivalente al $\underline{\mathbf{d}}$ nos determinará la misma superficie siempre que resulte no nulo para cualquier valor del parámetro "**u**". Como en la ecuación vectorial de una recta simple, esta diferencia cualitativa la venimos representando con la notación "**( )**"para las componentes de $\underline{\mathbf{D}}$ –línea–, en tanto conservaremos la notación "**{ }**" –vector– para la dirección $\underline{\mathbf{d}}$, sin que, como se ha dicho, esto suponga restricción a la hora de efectuar las operaciones usuales de suma o resta vectorial. Finalmente, utilizaremos habitualmente la notación "**( )** "para la superficie como conjunto de puntos de $\Re^3$ –imagen de $\underline{\mathbf{r}}$ –, o la notación "**{ }**" si la hacemos preceder del vector $\underline{\mathbf{r}}$.

Se consideran conocido todo el contexto de la multiplicidad de parametrizaciones propias de las superficies y los procedimientos para encontrar nuevas directrices a las que referirlas. En cualquier superficie reglada la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ separa en dos hojas la superficie según que recorramos desde cualquiera de sus puntos la generatriz correspondiente en el sentido de $\underline{\mathbf{d}}$ o en su opuesto. Podemos formular la misma superficie con la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ o tomando como directriz cualquier otra curva $\underline{\mathbf{D}}^*$ contenida en la superficie y que corte a todas las generatrices (figura 6). La distinción entre ambas hojas puede hacerse más representativa estructuralmente si se utiliza la línea de estricción como directriz de la superficie lo que constituye su "**parametrización intrínseca**" o, en su caso, la "**canónica**" si utilizamos el vector unitario para definir la dirección de las generatrices.

§ 3.02.- Algunas cuestiones de forma en las superficies regladas.

En las superficies regladas mediante alguna de sus parametrizaciones propias tomando "**v**" como parámetro lineal, es decir, en la forma:

$$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \{\mathbf{x}(\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \mathbf{y}(\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \mathbf{z}(\mathbf{u},\mathbf{v})\} = \underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u}) = (\mathbf{D}_1(\mathbf{u}),\ \mathbf{D}_2(\mathbf{u}),\ \mathbf{D}_3(\mathbf{u})) + \mathbf{v}\ \{\mathbf{d}_1(\mathbf{u}),\ \mathbf{d}_2(\mathbf{u}),\ \mathbf{d}_3(\mathbf{u})\},$$

el valor de **g*** es nulo y, trivialmente, tanto **e*** como **f*** son funciones del parámetro "**u**" por lo que $\mathbf{h^*(u) = - f^{*2} \le 0}$ y no existen puntos elípticos ni umbilicales. La clasificación de los puntos de una superficie reglada queda por lo tanto condicionado a los valores que tome el determinante:

$$\mathbf{f^*(u)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial D_1}{\partial u} & \dfrac{\partial D_2}{\partial u} & \dfrac{\partial D_3}{\partial u} \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ \dfrac{\partial d_1}{\partial u} & \dfrac{\partial d_2}{\partial u} & \dfrac{\partial d_3}{\partial u} \end{vmatrix} = (\dot{\underline{\mathbf{D}}}\,(u),\ \underline{\mathbf{d}}\,(u),\dot{\underline{\mathbf{d}}}\,(u)(u))$$

A la función **f*(u)** la venimos denominando parámetro de distribución. Los valores de "**u**" que anulan esta función determinan sobre la parametrización propia de la superficie las diferentes generatrices de puntos parabólicos también llamadas generatrices "**cilíndricas**". Si el parámetro de distribución es la función nula entonces todas las generatrices son de puntos parabólicos y la superficie se convierte en una desarrollable o "de curvatura nula", bien sea un cilindro o un cono o una tangencial de su línea de estricción –aquí llamada arista de retroceso–. No pueden, por lo tanto,

existir puntos parabólicos aislados en las superficies regladas pues estos se extienden siempre a lo largo de las rectas generatrices. Eventualmente sobre las generatrices cilíndricas pueden existir puntos planos aislados –cuando se anule e*– o pueden existir generatrices todas ellas de puntos planos para aquellos valores de "**u**" que anulen simultáneamente las funciones **e*** y **f***. Como se ve, las posibilidades de caracterización de la forma en las superficies regladas resultan bastante reducidas y deben de hacerse siempre desde el parámetro de distribución y a través de las generatrices. Se puede decir que en las superficies regladas regulares la forma se distribuye por rectas y no por puntos aunque esto no sea estrictamente correcto por la posible existencia de puntos aislados que sean planos.

La clasificación de los puntos de una superficie reglada regular sobrepasa la mera distinción académica. A lo largo de las generatrices cilíndricas en sus tramos regulares se verifican localmente las condiciones de las desarrollables por lo que se convierten automáticamente en líneas de fragilidad estructural en el sentido de que a lo largo de ellas la superficie se comporta –localmente– como una de curvatura simple –nula– o sea: deformable por flexión, en tanto sobre el resto de generatrices la superficie es de doble curvatura –anticlástica– y por lo tanto indeformable.

§ 3.03.- Las generatrices de puntos parabólicos

En una superficie reglada parametrizada en la forma $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u})$, cada una de las generatrices se singularizan, trivialmente, particularizando un valor $\mathbf{u} = \mathbf{u_0}$ que determina la recta $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{v}) = \underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u_0}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u_0})$, función del parámetro "**v**".

Según esto y lo visto anteriormente, desde un punto de vista práctico, para conocer las generatrices de puntos parabólicos de una superficie alabeada bastará simplemente obtener los valores de "**u**" que anulan **f*(u)**, o sea las soluciones de la ecuación **f*(u) = 0**. Cada uno de ellos nos determinará una generatriz de la superficie en el punto de su intersección con la directriz utilizada $\underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u_0})$ y con su dirección $\underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u_0})$. Así en la superficie parametrizada:

$$((1 + v) \cos u, (1 - v) \operatorname{sen} u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) + v \{\cos u, -\operatorname{sen} u, 1\}$$

cuyo parámetro de distribución es la función **f*(u) = – 2 sen u cos u,** las generatrices de puntos parabólicos se obtendrán a partir de los valores que anulan esta función que son:

u = 0, que determina la generatriz $\underline{\mathbf{r}}$ (v) = **(1,0, 0)** + v **{1, 0, 1}**, o bien, si se quiere, la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$,

u = π/2, que determina la generatriz $\underline{\mathbf{r}}$ (v) = **(0, 1, 0)** + v **{0, –1, 1}**, o bien, si se quiere, la recta $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$,

u = π, que determina la generatriz $\underline{\mathbf{r}}$ (v) = **(–1, 0, 0)** + v **{–1, 0, 1}**, o bien, si se quiere, la recta $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$,

u = 3 π/2, que determina la generatriz $\underline{\mathbf{r}}$ (v) = **(0, –1, 0)** + v **{0, 1, 1}**, o bien, si se quiere, la recta $\frac{x}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.

§ 3.04.- La línea de estricción

Salvo en los cilindros, existe una curva directriz vinculada estrechamente a la estructura de las superficies regladas que nos facilita el análisis formal de la mismas. Esta curva es única para cada una de ellas y es, además, la directriz mínima que corta a todas las generatrices. Sus puntos son llamados "**puntos centrales**" de la superficie así que cada generatriz tiene un punto central. Cualquier par de generatrices se encuentran más próximas entre sí justamente cuando alcanzan cada una de ella sus puntos centrales o sea, cuando atraviesan la línea de estricción, de aquí que la línea de estricción sea una línea de "constricción" o "encogimiento" de la distancia entre las generatrices.

Para cualquier superficie reglada parametrizada $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u})$ bastará recordar aquí la formulación más sencilla para obtener tal línea:

$$\underline{\mathbf{w}}\,(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}) - \frac{(\dot{\underline{\mathbf{D}}}(\mathbf{u}) \times \underline{\mathbf{d}}(\mathbf{u}))(\dot{\underline{\mathbf{d}}}(\mathbf{u}) \times \underline{\mathbf{d}}(\mathbf{u}))}{(\dot{\underline{\mathbf{d}}}(\mathbf{u}) \times \underline{\mathbf{d}}(\mathbf{u}))(\dot{\underline{\mathbf{d}}}(\mathbf{u}) \times \underline{\mathbf{d}}(\mathbf{u}))}\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u})$$

que escribiremos simplemente:

$$\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{D}} - \frac{(\dot{\underline{\mathbf{D}}} \times \underline{\mathbf{d}})(\dot{\underline{\mathbf{d}}} \times \underline{\mathbf{d}})}{(\dot{\underline{\mathbf{d}}} \times \underline{\mathbf{d}})(\dot{\underline{\mathbf{d}}} \times \underline{\mathbf{d}})}\ \underline{\mathbf{d}}$$

Cuando tomamos esta línea como directriz, la parametrización pasa a ser $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underline{\mathbf{w}}\,(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u})$ que es la llamada "parametrización **intrínseca**" reservando el nombre de "parametrización **canónica**" si, además, en la formulación

se utiliza la dirección unitaria de las generatrices $\frac{\underline{\mathbf{d}}}{|\underline{\mathbf{d}}|}$, es decir la parametrización $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \underline{\mathbf{w}}\,(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \frac{\underline{\mathbf{d}}}{|\underline{\mathbf{d}}|}(\mathbf{u})$. Por ejemplo, en la superficie parametrizada: **((1 + v) cos u, (1 – v) sen u, v) = (cos u, sen u, 0) + v {cos u, –sen u, 1}** se verificará:

$$\dot{\mathbf{D}}\times\mathbf{d} = \begin{vmatrix} -\,\mathrm{sen}\ u & \cos\ u & 0 \\ \cos\ u & -\,\mathrm{sen}\ u & 1 \end{vmatrix} = \{\cos u,\ \mathrm{sen}\ u,\ \mathrm{sen}^2 u - \cos^2 u\}\ ,\ \ \dot{\mathbf{d}}\times\mathbf{d} = \begin{vmatrix} -\,\mathrm{sen}\ u & -\cos\ u & 0 \\ \cos\ u & -\,\mathrm{sen}\ u & 1 \end{vmatrix} = \{-\cos u,\ \mathrm{sen}\ u,\ 1\}$$

y la línea de estricción será la

$$\underline{\mathbf{w}}\,(u) = (\cos u,\ \mathrm{sen}\ u,\ 0) - \frac{2\ \mathrm{sen}^2 u - 2\cos^2 u}{2}\{\cos u,\ -\mathrm{sen}\ u,\ 1\} = \{2\cos^3 u,\ 2\ \mathrm{sen}^3 u,\ \cos^2 u - \mathrm{sen}^2 u\},$$

así que la parametrización intrínseca de la superficie es la

$$(2\cos^3 u,\ 2\ \mathrm{sen}^3 u,\ \cos^2 u - \mathrm{sen}^2 u) + v\ \{\cos u,\ -\mathrm{sen}\ u,\ 1\} = (2\cos^3 u + v\cos u,\ 2\ \mathrm{sen}^3 u - v\ \mathrm{sen}\ u,\ \cos^2 u - \mathrm{sen}^2 u + v),$$

en tanto la parametrización canónica sería la $\left(2\cos^3 u + v\frac{\cos\ u}{\sqrt{2}},\ 2\ \mathrm{sen}^3 u - v\frac{-\,\mathrm{sen}\ u}{\sqrt{2}},\ \cos 2\ u + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right)$.

En general, la línea de estricción puede pasar desapercibida entre las infinitas posibles curvas arbitrarias que pueden definirse sobre la superficie pero la presencia de algunas características físicas notables como la existencia de algún tipo de "simetría" –o "antimetría"– en algunos casos puede facilitarnos su localización a primera vista. En ciertas superficies se puede hacer evidente como en las desarrollables en las que esta línea es verdaderamente determinante ya que aquí se convierte en una arista "viva" que separa de forma manifiesta sus dos hojas. En otras superficies alabeadas muy notorias se convertirá en una recta como pasa, por ejemplo, en los conoides rectos o en los helicoides cerrados. En las superficies de revolución regladas, generadas por rotación de una recta alrededor de otra no coplanaria ni contenida en un plano perpendicular a ella, la línea de estricción coincidirá con su círculo de garganta. Así ocurre, por ejemplo, en el hiperboloide (alabeado) de una hoja que es el ejemplo clásico del que se hablará posteriormente.

§ 3.05.- Los puntos singulares intrínsecos aislados en las superficies regladas. Vértices y Pinzas.

Si descartamos introducir singularidades a través de la inadecuada –o menos adecuada– formulación de la dirección de las generatrices tal como hemos descrito en el **§ 3.01**, desde un punto de vista práctico en las superficies regladas podemos considerar tres tipos de singularidades:

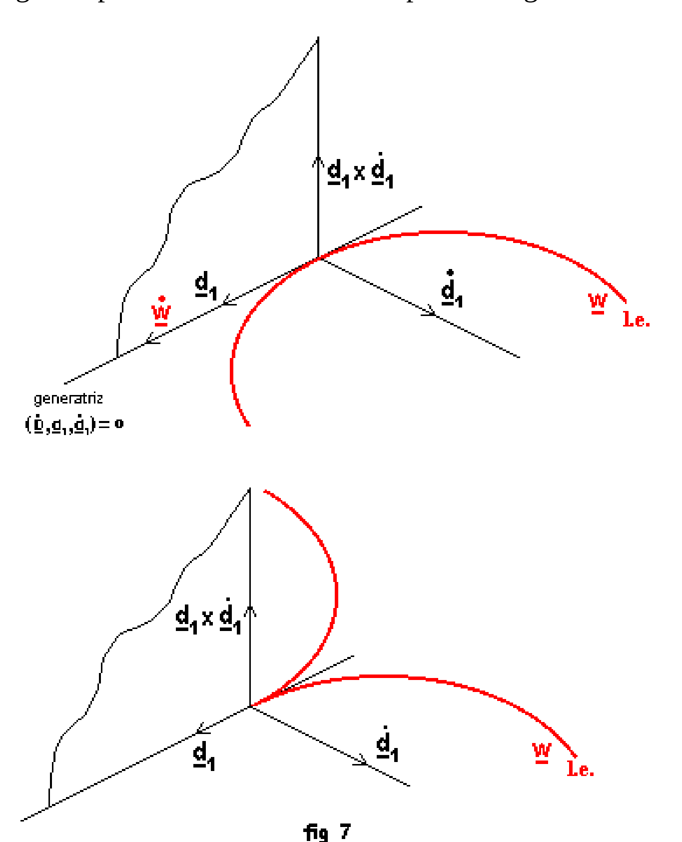


fig 7

a) Las singularidades heredadas por la superficie debido a la directriz utilizada en su generación.

b) Las singularidades "estructurales" locales en superficies generadas con dos o tres directrices a causa de su posición relativa y como consecuencia la ausencia estricta de la dirección de la generatriz correspondiente en algún punto.

c) Las singularidades "estructurales" o propias de las superficies debidas a sus características específicas, "intrínsecas" o ligadas a su forma.

Cuando la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ es una curva regular, los puntos singulares de la superficie son siempre puntos centrales –sobre la línea de estricción– ya que si $\dot{\underline{\mathbf{D}}}$ y $\underline{\mathbf{d}}$ tienen la misma dirección, trivialmente $\underline{\mathbf{D}}$ es tangente a $\underline{\mathbf{w}}$ o coincide con ella. Los puntos singulares de una superficie alabeada son, además, necesariamente puntos sobre una generatriz cilíndrica o de puntos planos.

Si consideramos la superficie descrita en su parametrización canónica $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{w}} + v\ \underline{\mathbf{d}}_1$, siendo $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{d}}/|\underline{\mathbf{d}}|$, el análisis de los puntos singulares se simplifica notablemente. El vector $(\dot{\underline{\mathbf{w}}}\times\underline{\mathbf{d}}_1) + v\ (\dot{\underline{\mathbf{d}}}_1\times\underline{\mathbf{d}}_1)$ se anulará

solamente si $\underline{\dot{\mathbf{w}}} \times \underline{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{0}$ en valores $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ –de la línea de estricción–, puesto que $\underline{\dot{\mathbf{w}}} \times \underline{\mathbf{d}}_1$ tiene la dirección de $\underline{\dot{\mathbf{d}}_1}$, siendo $\underline{\mathbf{d}}_1$ y $\underline{\dot{\mathbf{d}}_1}$ perpendiculares; esto ocurre para valores "**u**" que anulen $\underline{\dot{\mathbf{w}}}\,(\mathbf{u})$ o bien en aquellos en los que $\underline{\dot{\mathbf{w}}}$ tenga la dirección de $\underline{\mathbf{d}}_1$. En el primer caso se trata de puntos singulares de la línea de estricción –que son puntos centrales–, y en el segundo caso se trata de generatrices tangentes a la curva $\underline{\mathbf{w}}$ (figura 7)

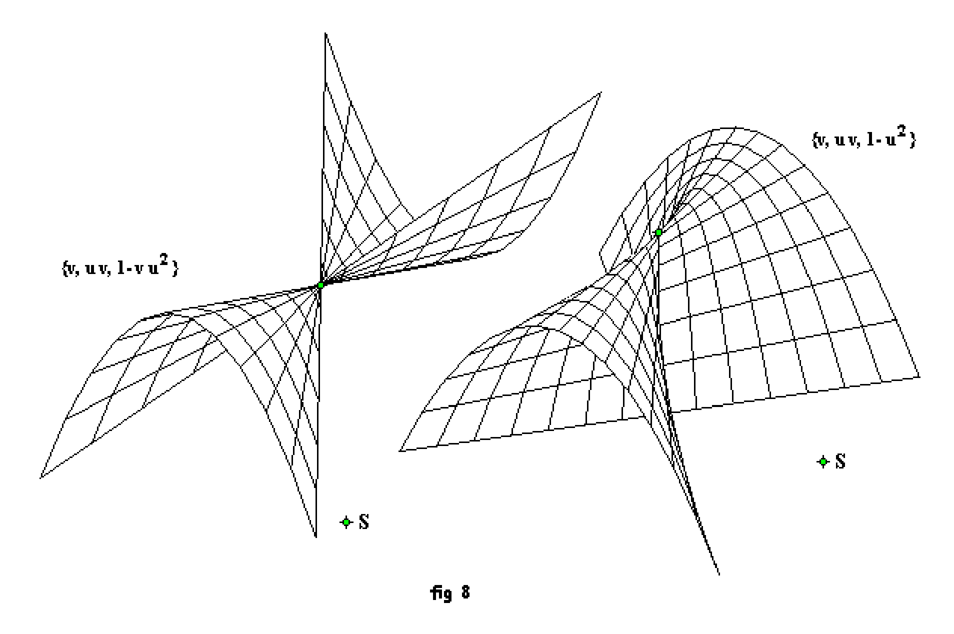


fig 8

El primer tipo de singularidad a) ya han sido tratado anteriormente. Su determinación se realiza sin grandes dificultades. Tendremos ocasión de tratar el tipo b) posteriormente cuando se analicen algunos tipos de cuñas como las de los ejemplos propuestos en **§ 4.04**.

En relación con el tipo c) podemos decir que las superficies regladas presentan dos formas notables de atravesarse a sí mismas dejando puntos singulares aislados mientras segregan dos hojas a ambos lados de esta auto-intersección (figura 8). En la primera, la frontera interior de repliegue es un punto singular aislado y estamos hablando de un "vértice". Ejemplos triviales de estos vértices son los de un cono. Como se sabe, las superficie cónicas, son superficies desarrollables cuya línea de estricción se convierte en un punto –singular–.

{v sen² u, - v sen u cos u, sen u}
{u v, v (1 - u²), (1 - v) (1 - u²)}
{(1 + v) cos u, - v, (3 + v) sen u}
{u v, v, (6 - 5 v) u²}

fig 9

fig 10

La segunda manera de atravesarse a sí misma es mucho más compleja: la auto-intersección es una semirrecta cuyo extremo constituye propiamente el punto singular. Este segundo caso permite una mayor cantidad de objetos geométricos interesantes desde diferentes puntos de vista y representa, como se ha dicho, una forma más complicada de curvarse la superficie alrededor de un punto. Es lo que denominamos un "**pinzamiento**" o "**pinza**" de la superficie. Podemos generar una

gran cantidad de objetos curvados interesantes alrededor de una pinza de este tipo como se muestra en algunos ejemplos de la figura 9. Cuando dos pinzas se encuentran en la superficie sobre la misma semirrecta, esta se convierte en un "pliegue", segmento interior con dos puntos singulares en sus extremos (figura 10) que determina, por ejemplo, parte de la estructura característica de las cuñas. La distinta inserción de estos pliegues o su duplicación, por ejemplo, nos permiten generar nuevas formas curvadas de interés (figura 11).

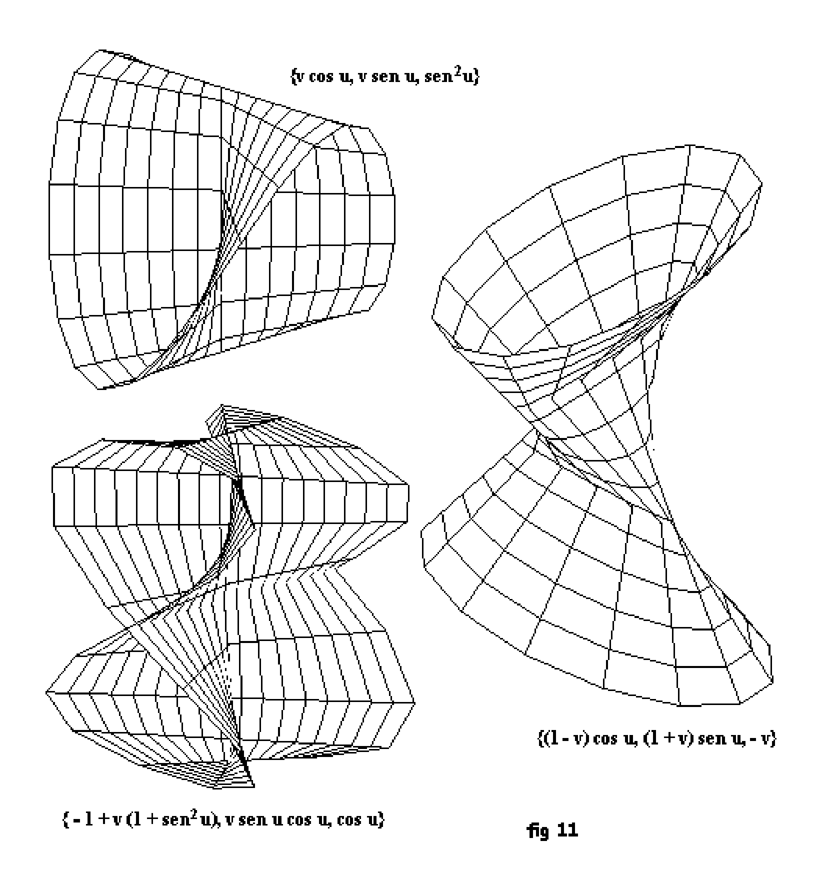


fig 11

§3.06.- Pinzamientos simples y múltiples. Los conoides de Pückler.

En determinados contextos una pinza simple de una superficie es conocida también como una "discontinuidad de Withney" y puede ser generalizada bajo diversos órdenes "**n**" distinguiendo "**pinzamientos múltiples**" visualizados, por ejemplo, en los **conoides de Plücker**. La parametrización general de estos conoides derivada del uso de las coordenadas polares **ρ = v**, **θ = u**, es la **r (u, v) = {v cos u, v sen u, a cos n u}**, aunque para referirse a esta familia de conoides es habitual utilizar, por su sencillez, su ecuación cilíndrica **z = a con n θ**. En la figura 12 se presentan estos conoides para órdenes pares **n = 2** y **n = 4** y para los impares de "dos hojas" **n = 1** y **n = 3.** Posteriormente tendremos ocasión de volver a generar estos mismos objetos o otros similares.

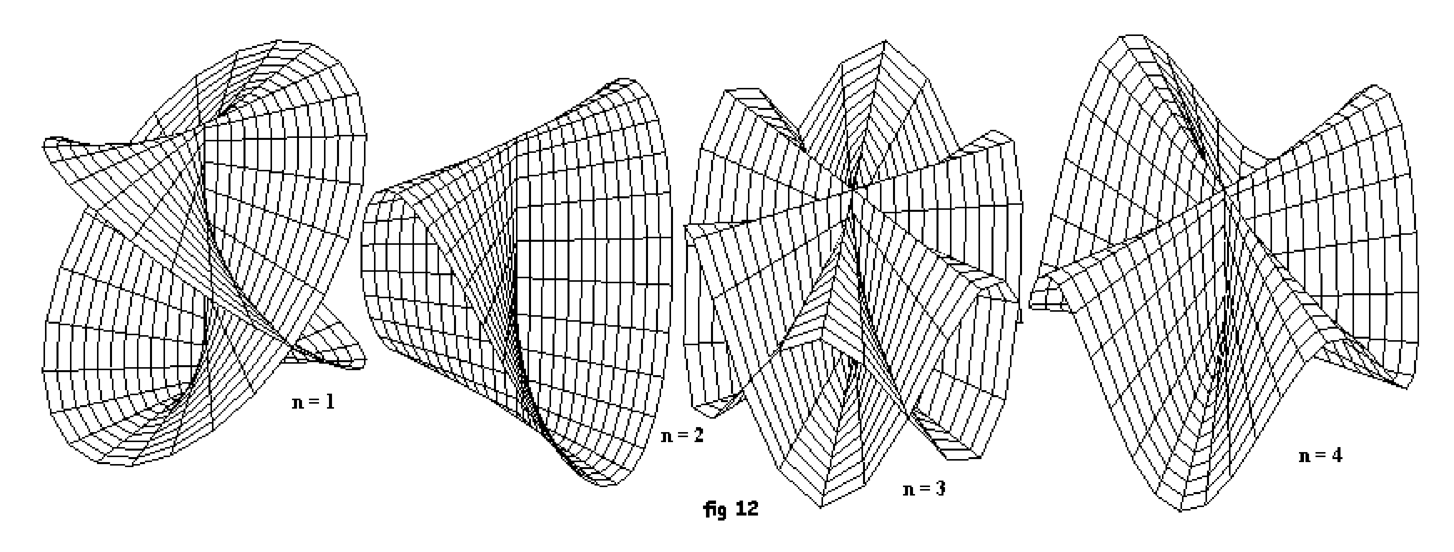


fig 12

Estos pinzamientos de las superficies, puntos singulares aislados de distintos órdenes, se encuentran o se producen sobre las superficies, dicho sea de paso, con infinidad de variantes. Es decir la superficie misma se puede

extender alrededor de la pinza de múltiples maneras lo que indica que es la estructura de la forma y no la forma misma lo esencial de la singularidad. Algunas superficies generadas alrededor de estas singularidades tienen valores simbólicos o plásticos muy notables y pueden sugerir nuevas posibilidades en el campo del diseño.

§ 3.07.- Líneas de carácter singular. Singularidades transmitidas y aristas de retroceso.

En una superficie reglada los posibles puntos singulares de la directriz se heredan sobre la superficie en forma de una línea curva o recta; en particular los puntos de retroceso de algunas directrices proporcionan una marcada arista en la superficie que no es estructural sino consecuencia de la elección de la directriz (figuras 13/b). En las superficies desarrollables o "de curvatura nula" que no sean cilindros la línea de estricción es crítica y se convierte en una arista similar pero que es intrínseca a la superficie y por lo tanto estructural, aquí las rectas generatrices se convierten en tangentes a la línea de estricción y esta divide de forma notoria la superficie en sus dos hojas (figuras 13/a) Esta línea es conocida como la arista de retroceso de la desarrollable. Todas las superficies de curvatura nula que no son cilindros son superficies tangenciales de su arista de retroceso. Los conos son una excepción porque la línea de estricción se convierte en un punto.

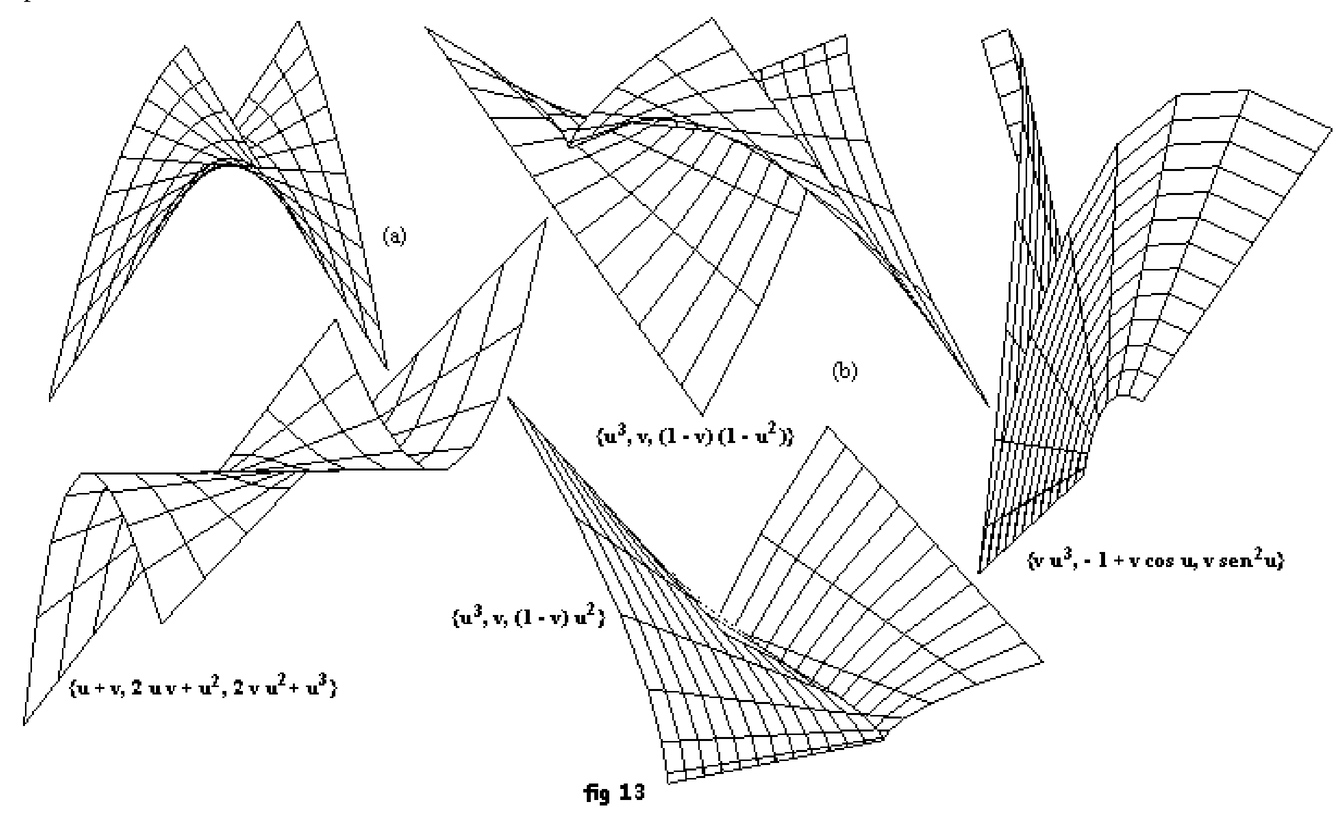


fig 13

§ 4.- Conoides

§ 4.01.- Superficies con plano director. Conoides rectos y oblicuos

Entre las superficies generadas en su forma propia a partir de cualquier directriz $\underline{\mathbf{D}}\,\mathbf{(u)}$ destacan en el campo de la arquitectura y la ingeniería, aquellas en las que las generatrices son todas paralelas a un plano fijo y bien determinado denominado "**plano director**". Llevados los vectores $\underline{\mathbf{d}}\,\mathbf{(u)}$ al origen de coordenadas sus extremos definirán, trivialmente, una curva plana –si $\underline{\mathbf{d}}\,\mathbf{(u)}$ es unitario será una circunferencia de radio unidad– por lo que estas superficies pueden ser definidas con la parametrización $\underline{\mathbf{r}}\,\mathbf{(u, v)} = \underline{\mathbf{D}}\,\mathbf{(u)} + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}\,\mathbf{(u)}$ y la condición adicional $(\dot{\underline{\mathbf{d}}}, \ddot{\underline{\mathbf{d}}}, \dddot{\underline{\mathbf{d}}}) = \mathbf{0}$ o bien, si se quiere, $(\underline{\mathbf{d}}, \dot{\underline{\mathbf{d}}}, \ddot{\underline{\mathbf{d}}}) = \mathbf{0}$. Un importante conjunto de estas superficies consiste en utilizar dos directrices que sirvan a las generatrices de apoyo por lo que resulta ser un caso particular del más general en el que las superficies se generan por apoyo sobre tres directrices cuando, en términos proyectivos, una de ellas es impropia.

Cuando al menos una de las directrices propias es una recta –no paralela al plano director ni contenida en él– la superficie pasa a denominarse un "**conoide**". La directriz rectilínea es el llamado "**eje**" del conoide. Cuando el eje es perpendicular al plano director el conoide será "**recto**" y en otro caso "**oblicuo**". Los conoides son superficies alabeadas –de doble curvatura– salvo que degeneren en un plano por la posición relativa de las dos directrices respecto del plano

director. No existen por lo tanto conoides desarrollables que no sean superficies planas. En los conoides rectos no triviales el eje se convierte en línea de estricción e independientemente de las posibles singularidades transmitidas a la superficie por la directriz curva, los puntos singulares estructurales serán puntos centrales del eje.

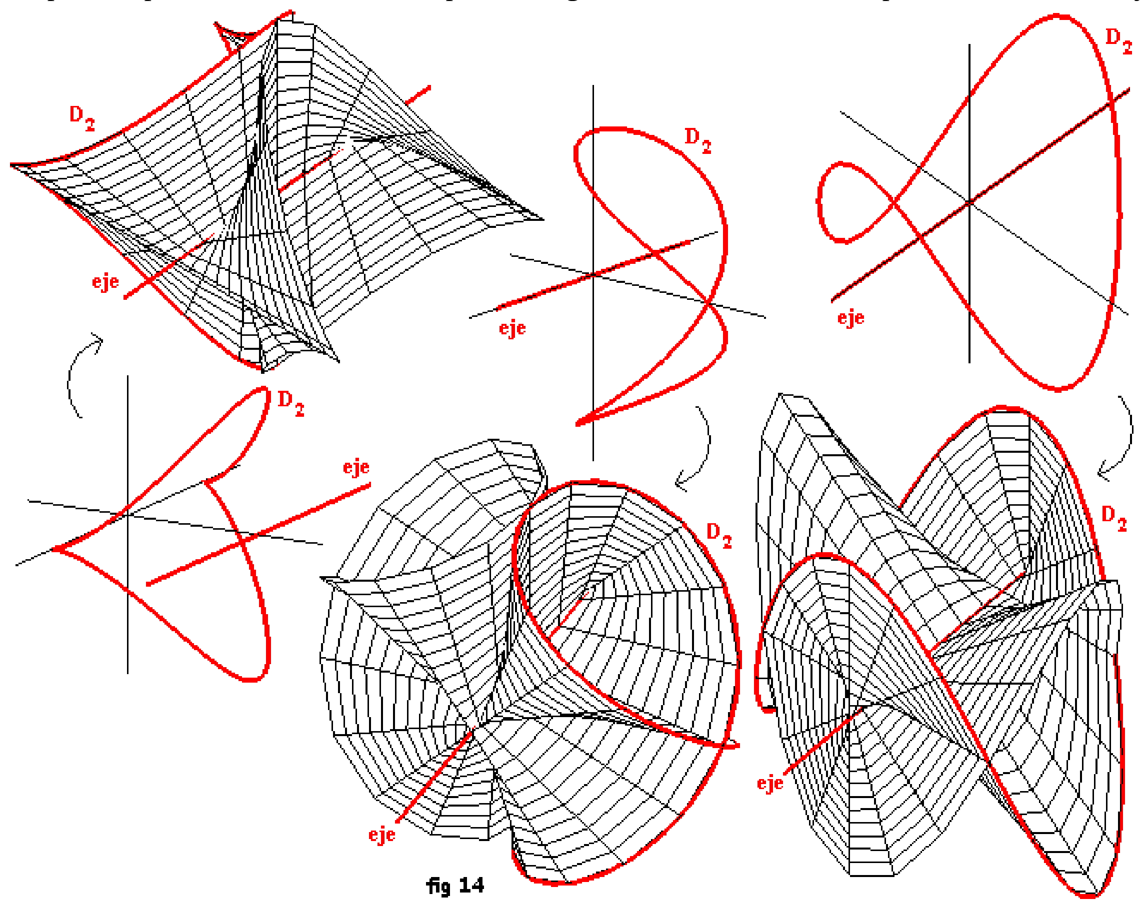
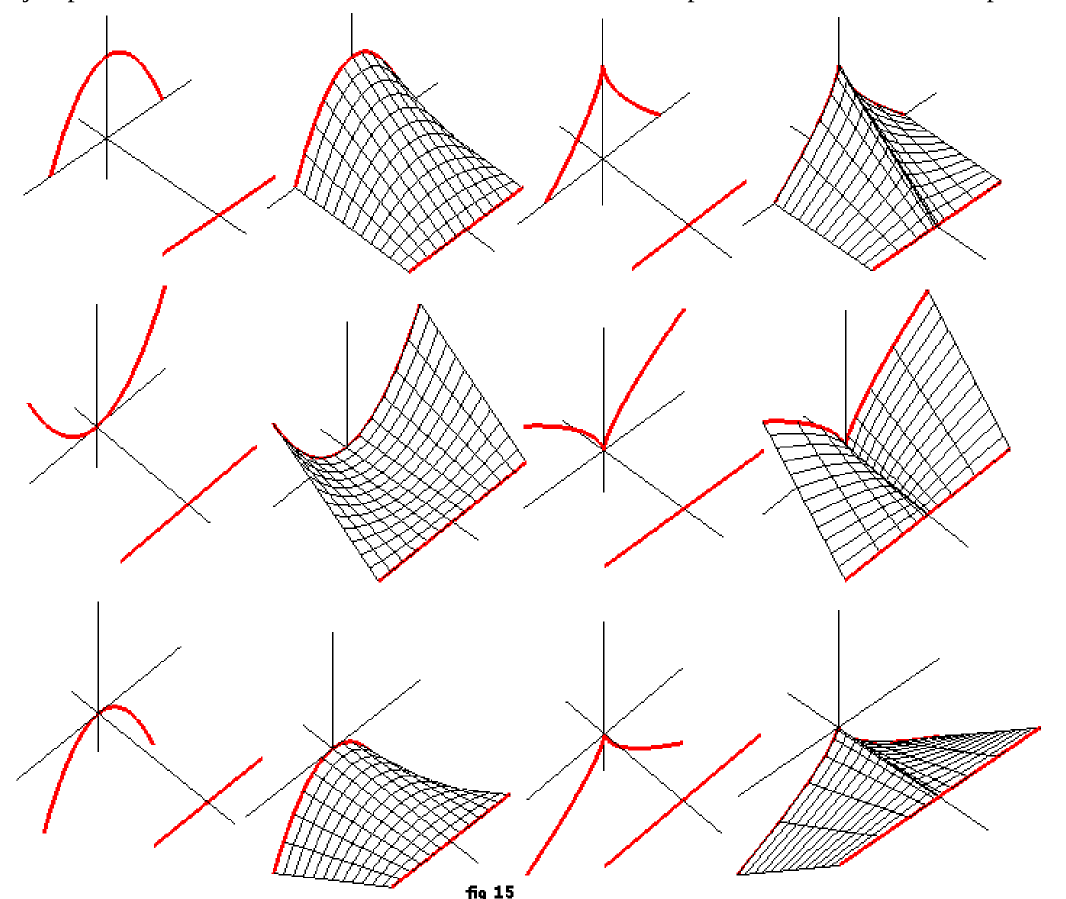


fig 14

En la figura 14 pueden verse algunos interesantes ejemplos de conoides rectos generados con curvas alabeadas en los que se han resaltado la directriz tomada y el eje.

Por simplicidad e interés constructivo destacan los conoides generados con una curva directriz plana y con distintos ejes no paralelos ni contenidos en el plano director y, trivialmente, tampoco contenidos en el mismo plano de la curva. Son clásicas las construcciones con conoides rectos utilizando la parábola o catenaria o bien una semicircunferencia con un eje paralelo a su plano en distintas posiciones relativas. En la figura 15 se muestran algunos ejemplos de conoides rectos utilizando como directriz la parábola o una curva simple astroidal con un punto de retroceso y distintas posiciones relativas respecto del eje que se mantiene en todos los casos paralelo al plano de la directriz. Habitualmente se muestran los fragmentos finitos de la superficie limitados entre las dos directrices consideradas pero normalmente a ambos lados del fragmento construido la superficie puede hacerse más compleja y considerarse algunos otros fragmentos con diferente interés geométrico. En la figura 16 se muestran fragmentos distintos de las mismas superficies generadas en la figura 15.


fig 15

Muy interesante desde el punto de vista constructivo resulta el acoplamiento de diferentes fragmentos de este tipo de conoides. En la figura 17, por ejemplo y a título representativo, se han acoplado algunos fragmentos generados

en los conoides de directriz parabólica de la figura 15 con algunas condiciones sencillas de simetría y/o traslación y en la figura 18 otros fragmentos significativos de las familias de conoides de traza astroidal. Se comprende que las posibilidades de acoplamiento superan con mucho la de los objetos mostrados en esas figuras.

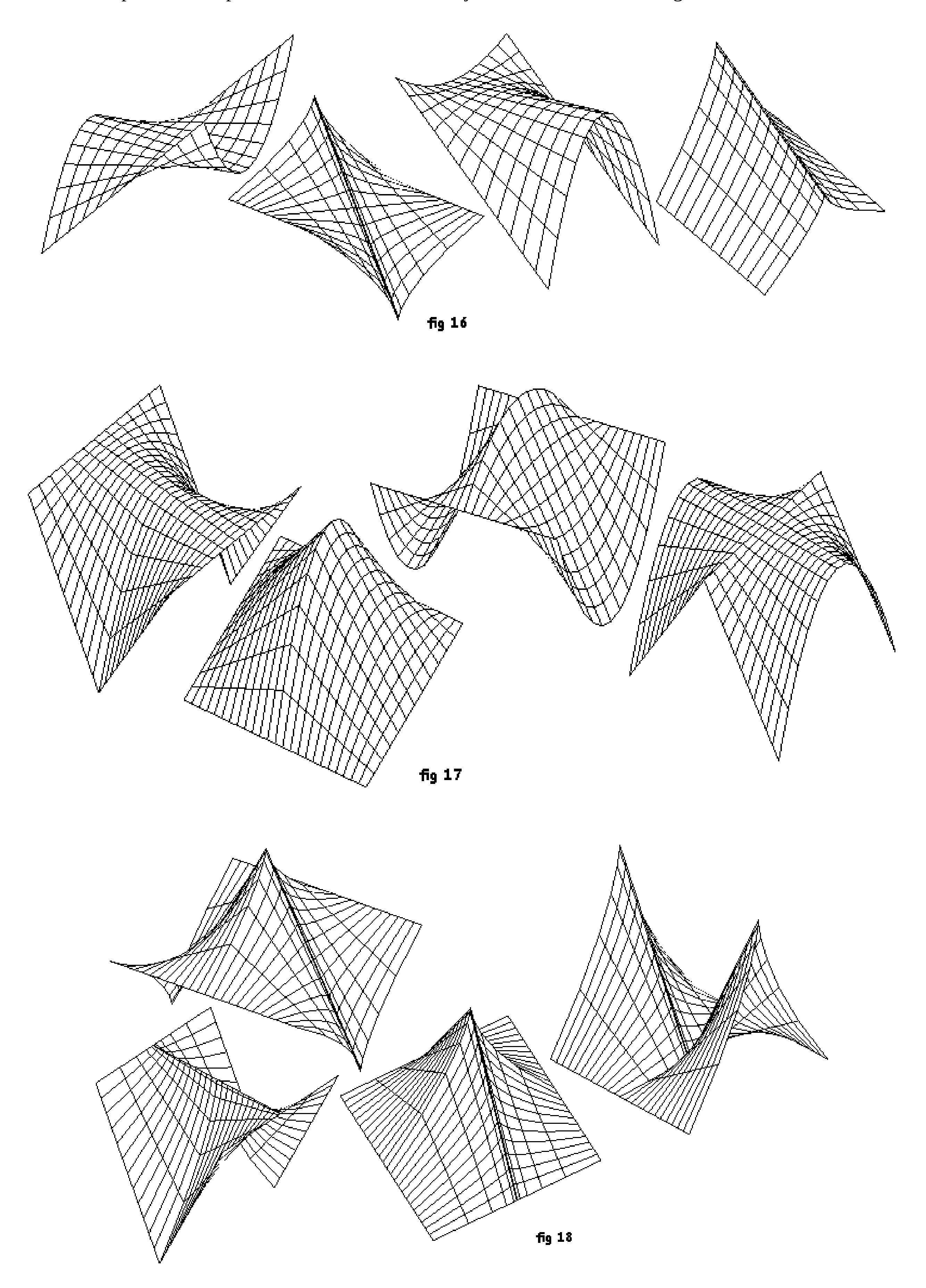


fig 16

fig 17

fig 18

Algunos de estos conoides rectos fueron explorados en la primera mitad del siglo XX por los arquitectos e ingenieros que los materializaron como cascarones de hormigón armado. Es el caso, por ejemplo, de Bernard Laffaille (Reims, 1900 - Paris, 1955) o de Felix Candela (Madrid 1910 - Durham (EE.UU.) 1997) Ambos terminaron por abandonarlos para acercarse a los paraboloides hiperbólicos (figura 19)

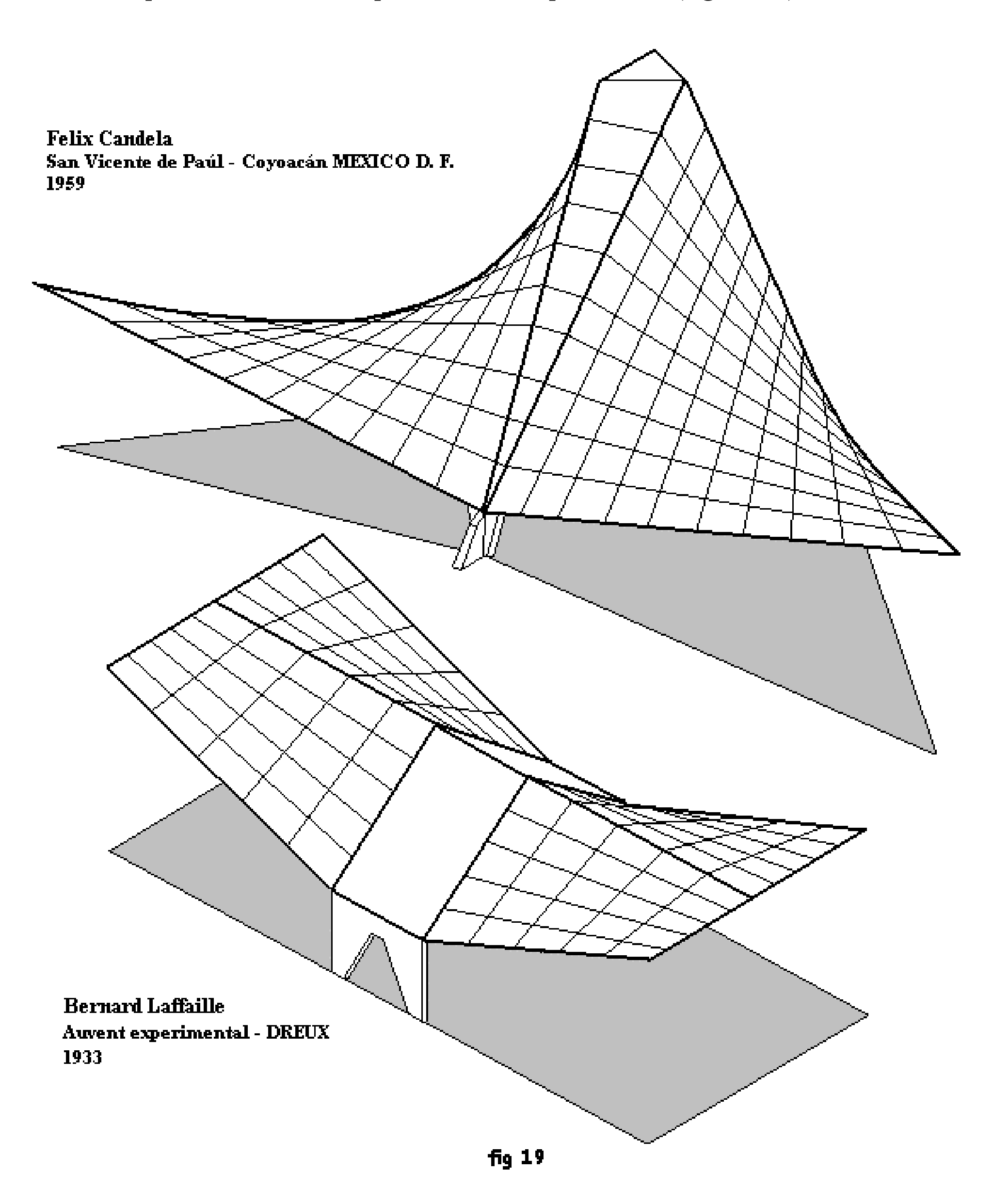


fig 19

§ 4.02.- Trazados de conoides oblicuos

Nos limitaremos a los trazados clásicos más sencillos de conoides generados con una directriz plana y el eje paralelo al plano de la directriz vistos anteriormente. En los conoides oblicuos deberemos previamente establecer al menos dos trazas del plano director **A x + B y + C z + D = 0** sobre los planos coordenados. Esto se hace fácilmente sin más que considerar dos de las tres rectas **A x + B y + D = 0**, **A x + C z + D = 0** ó **B y + C z + D = 0** sobre los planos **OXY**, **OXZ** ó **OYZ** respectivamente. La intersección de estas rectas sobre los ejes coordenados serán respectivamente los puntos **(–D/A, 0, 0)**, **(0, –D/B, 0)** y **(0, 0, –D/C)**, así que podrán completarse estas rectas uniendo respectivamente cada par de estos puntos. En la figura 20 se ha representado este fragmento de un plano general arbitrario contenido en el primer octante para su mejor visualización. Cuando alguno de los coeficientes **A**, **B**, **C** o **D** se anulen, se simplificarán los trazados. En esta figura se representa un primer trazado de un conoide oblicuo con una directriz parabólica en el plano **XOY** y un eje en un plano paralelo cuya proyección sobre el plano **z = 0** es paralela al eje **OX**. Se han indicando las trazas del plano director **A x + B y + C z + D = 0** con los planos coordenados que nos permiten disponer de la recta "**a**" entre los puntos **(–D/A, 0, 0)** y **(0, 0, –D/C)** y la recta "**b**" entre los puntos **(–D/A, 0, 0)** y **(0, –D/B, 0)**. Para trazar la generatriz que une el punto **P** de la directriz con su correspondiente **P'** del eje (figura 21) basta trazar una paralela a la recta "**a**" desde **P** encontrando al eje **OX** en **P''**, después de **P''** a **P'''** con una recta paralela a "**b**" y de **P'''** a **P'** con una paralela a "**a**". Lo mismo para los puntos **Q** y **R** representados en la figura. Los planos **PP''P'''P'**, **QQ''Q'''Q'** y **RR''R'''R'** son paralelos al

plano director. La construcción puede realizarse utilizando cualesquiera otras dos trazas del plano director sobre los coordenados.

Independientemente de la directriz tomada, cuando el eje del conoide oblicuo se encuentra sobre el plano **XOY** en dirección del eje **OX** como en la figura 22 el trazado es aún más simple y bastan dos rectas paralelas a las direcciones "**a**" y "**b**" para encontrar el punto de la generatriz correspondiente (figura 23). Esta es la posición relativa tradicional en que construimos los conoides que nos interesan ya sean los rectos u los oblicuos.

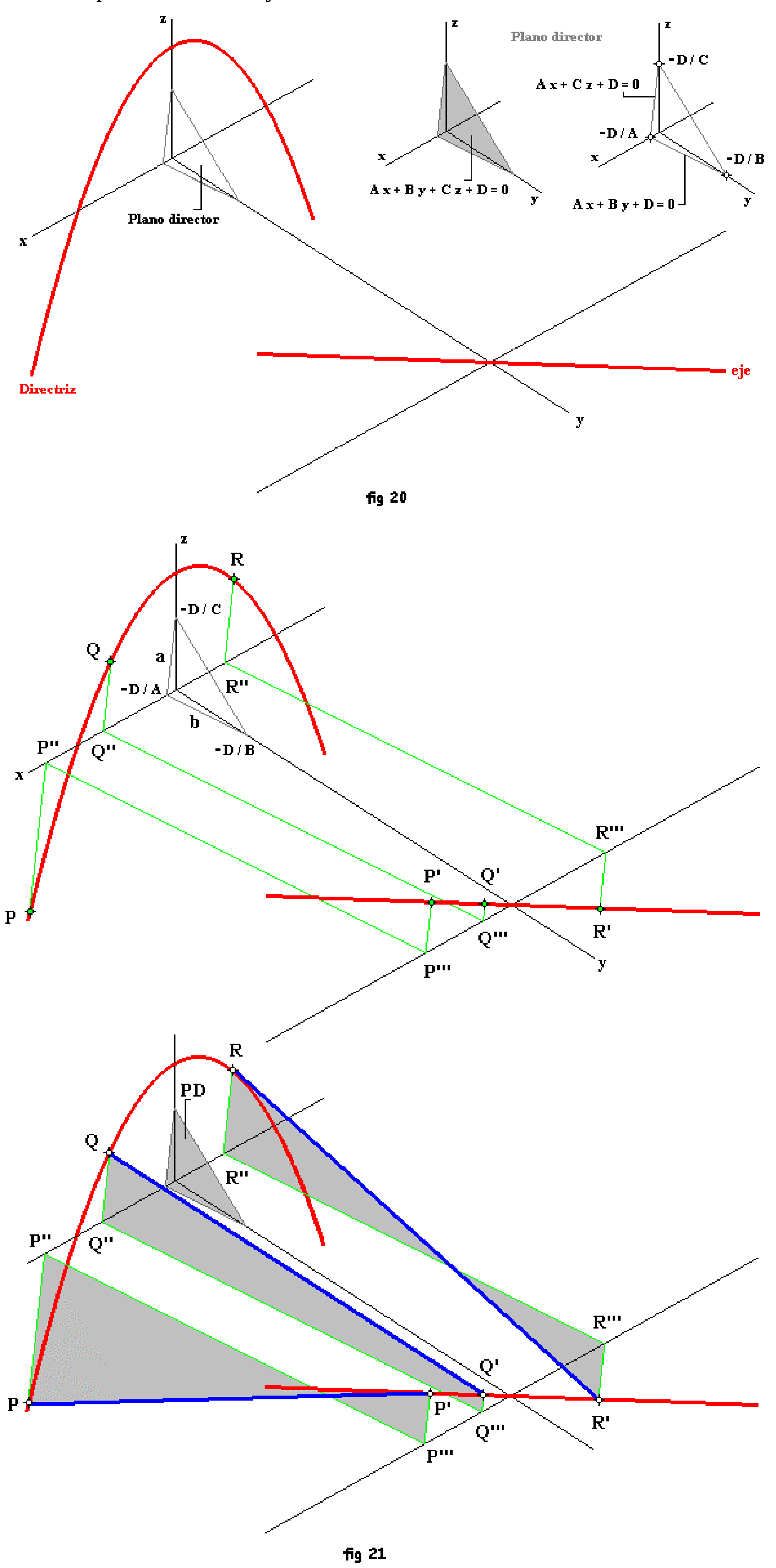


fig 20

fig 21

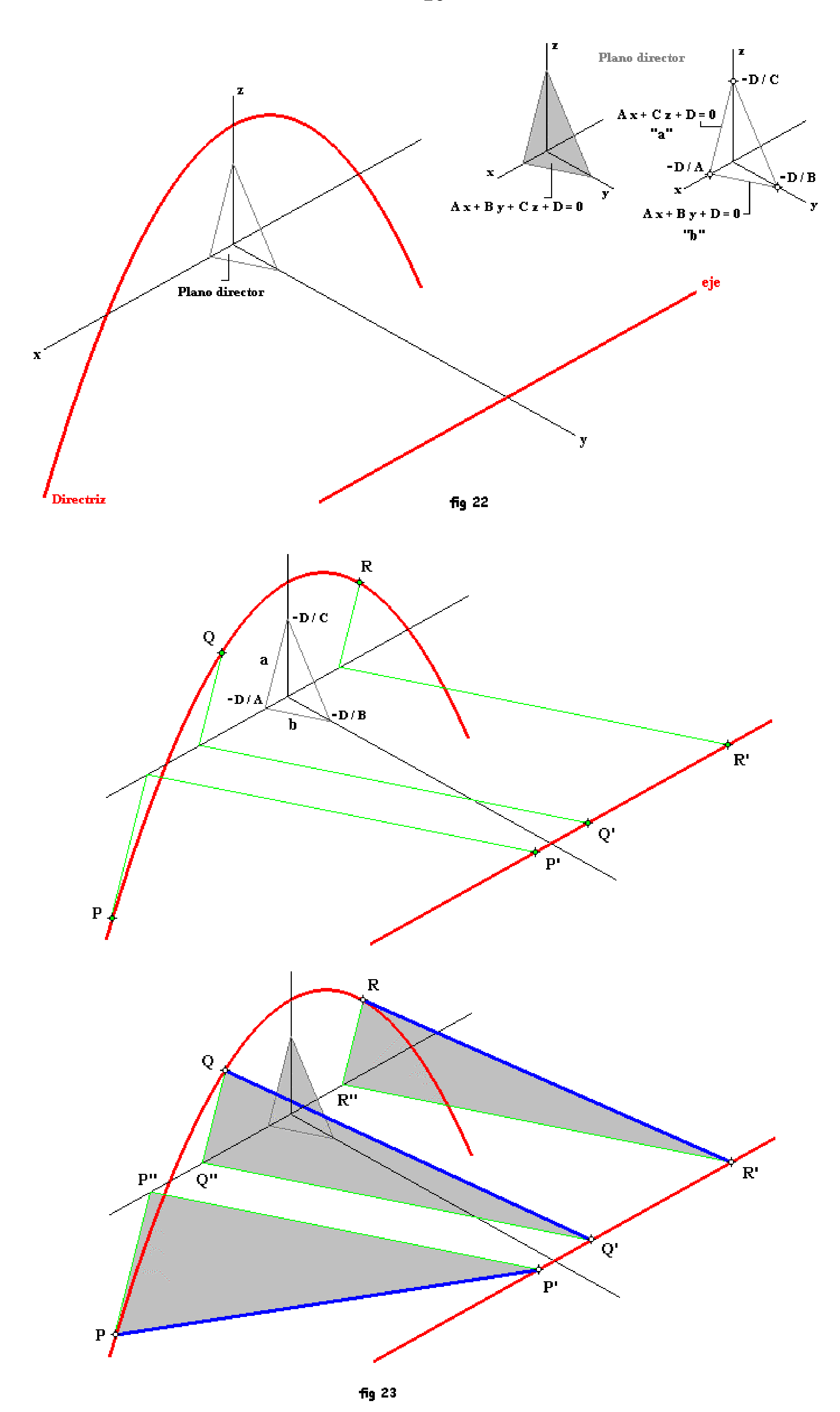
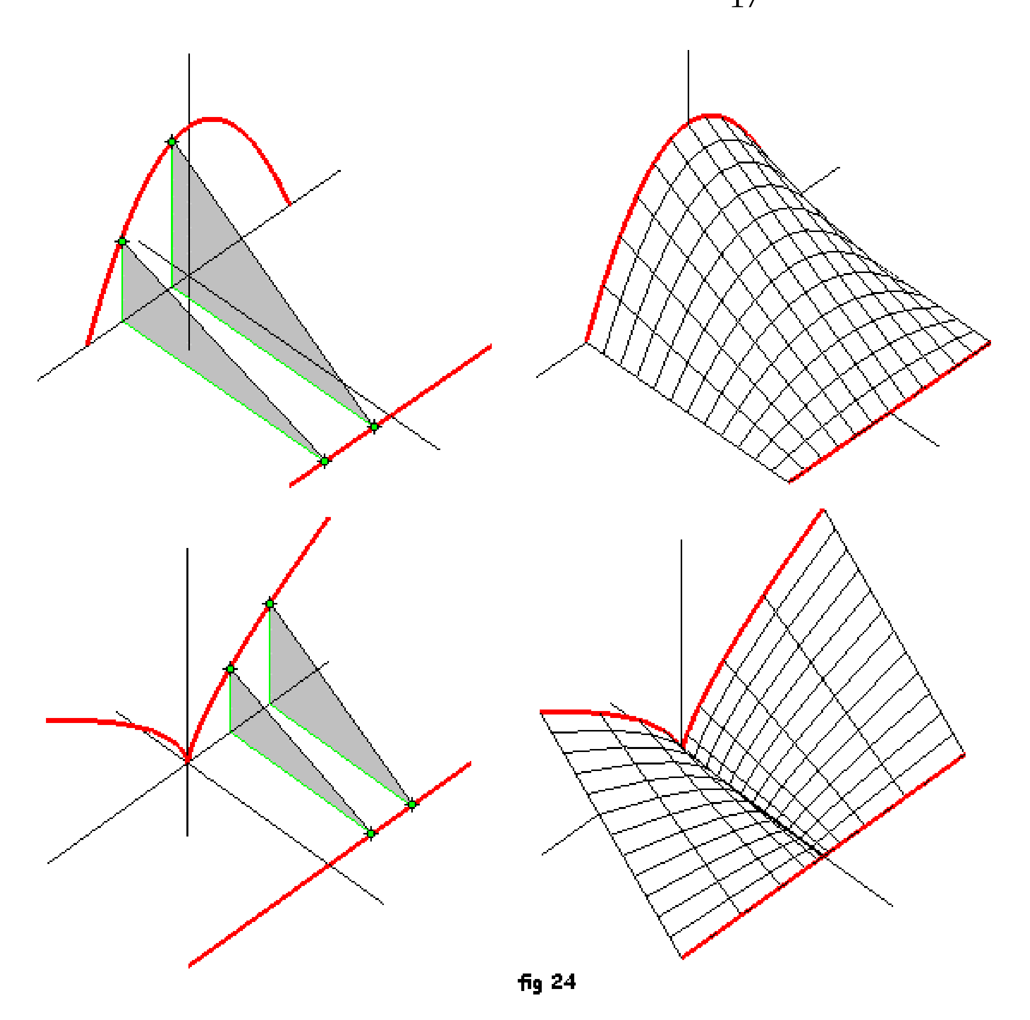

z
Plano director
z
-D / C
A x + C z + D = 0
"a"
-D / A
-D / B
x
y
A x + B y + C z + D = 0
x
y
A x + B y + D = 0
"b"
z
Plano director
x
eje
y
Directriz
R
-D / C
Q
a
-D / A
-D / B
b
R'
Q'
P'
P
R
Q
R''
P''
Q''
R'
Q'
P'
P

fig 22

fig 23


fig 24

§ 4.03.- Trazados de conoides rectos

Salvo excepciones, los conoides oblicuos son objetos mucho menos interesantes en el ámbito del diseño que los conoides rectos. El replanteo de estos objetos resulta muy simplificado si colocamos el plano director como uno de los planos coordenados, por ejemplo el **YOZ** lo que significa que el eje del conoide llevará la dirección del eje **OX**. Podemos así trazar rápidamente las generatrices de las superficies que se construyeron en la figura 15. Los trazados son muy sencillos y se muestran en la figura 24.

§ 4.04.- Conoides oblicuos con directrices planas cerradas.

Los conoides oblicuos o rectos generados con una directriz plana cerrada tal como una elipse, una circunferencia o una astroide con un eje que no tenga puntos en común con ella determinan cuñas simples en las que la línea de estricción tiene dos puntos singulares estructurales independientemente de otras singularidades que puedan ser heredadas de la directriz. Los puntos de contacto entre las directrices se convierten en puntos singulares a causa de que no existe definida la correspondiente dirección de la generatriz por lo que esta se convierte localmente en un punto de carácter singular del tipo b) descrito en el apartado **§ 3.05**. Excluir este tipo de anomalías en el ámbito de las superficies regladas es dejar fuera una gran cantidad de objetos geométricos que merecen nuestra atención. Pasa que el interés preferente por llegar a una definición que no presente puntos vulnerables obliga en muchas ocasiones a olvidar o dejar aparcados en otros lugares poco precisos, fuera del ámbito de análisis, algunos objetos muy interesantes. Se puede caracterizar la estructura de la forma de estos conoides estableciendo la línea de estricción y sobre ella los puntos singulares intrínsecos más las generatrices de puntos parabólicos y sus posiciones relativas con respecto a la línea de estricción.

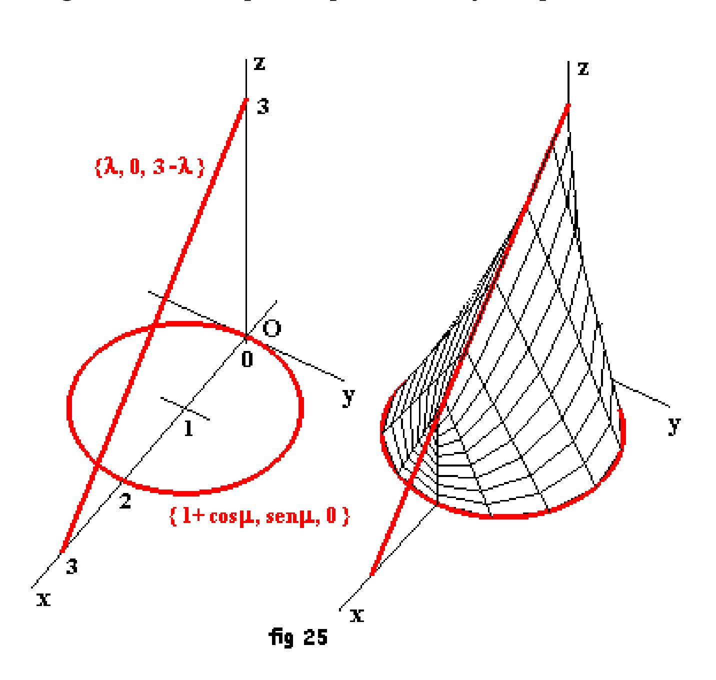


fig 25

Tomaremos la circunferencia $\mathbf{(x-1)^2 + y^2 = 1}$ en el plano $\mathbf{z = 0}$ como directriz fija y como plano director el plano **YOZ**. Se pueden generar algunas cuñas oblicuas notables según las posiciones relativas de la recta –eje– con la circunferencia y los posibles contactos entre ambas. En el primer caso que contemplamos el eje es la recta $\mathbf{x + z = 3}$, $\mathbf{y = 0}$ (figura 25)**.** Las directrices no tienen ningún punto común ni el eje atraviesa el círculo. Escribiremos las parametrizaciones de la curva directriz y del eje en la forma $\mathbf{(1+ \cos \mu, \operatorname{sen} \mu, 0)}$ y $\mathbf{(\lambda, 0, 3-\lambda)}$, así que las direcciones de las generatrices las podremos representar por $\underline{\mathbf{d}} = \{\lambda - 1 - \cos \mu, -\operatorname{sen} \mu, 3 - \lambda\}$ que, por ser perpendiculares al plano director, se convertirán en las $\underline{\mathbf{d}} = \{0, -\operatorname{sen} \mu, 2-\cos \mu\}$. Con ellas podemos escribir la parametrización:

$$\underline{\mathbf{r}}\,\mathbf{(u, v) = (1+ \cos u, (1 - v) \operatorname{sen} u, v\,(2 - \cos u)) =}$$
$$\mathbf{= (1+ \cos u, \operatorname{sen} u, 0) + v\,\{0, -\operatorname{sen} u, 2-\cos u\}}.$$

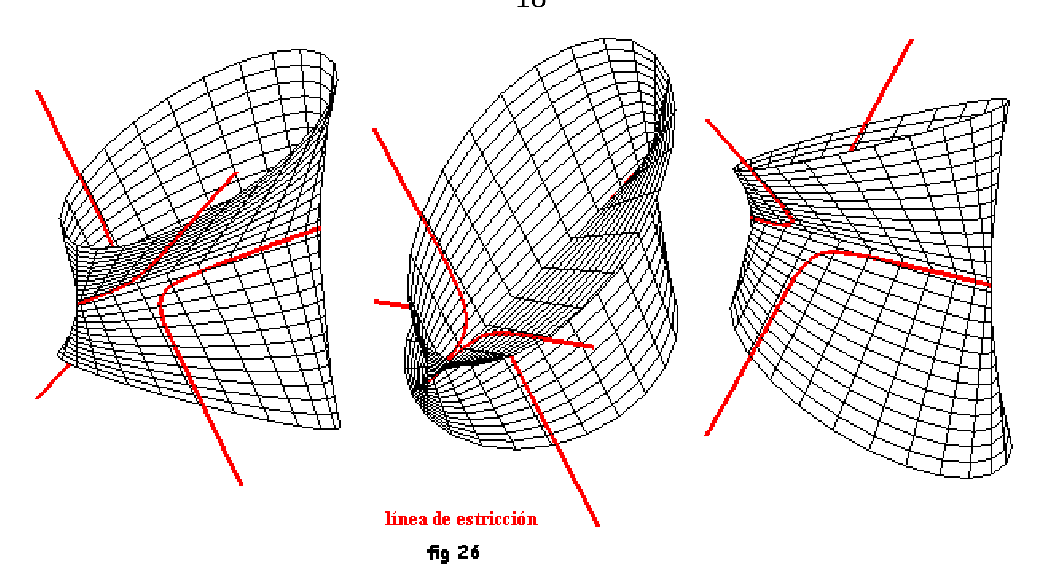


fig 26

La superficie tiene dos puntos singulares **(2, 0, 1)** y **(0, 0, 3)** que son puntos de retroceso de la línea de estricción: $\left(1 + \cos u, -\frac{\mathrm{sen}^3 u}{2\cos u - 1}, \frac{\cos u\,(\cos^2 u - 4\cos u + 4)}{2\cos u - 1} \right)$. Necesitamos ampliar el fragmento de la figura 25 a ambos lados de las directrices para poder representar adecuadamente esta línea (figura 26). Presenta dos discontinuidades de salto infinito y las correspondientes asíntotas son dos de las generatrices de puntos parabólicos. Hay otras dos generatrices cilíndricas que pasan por los puntos singulares de la superficie (figura 27). El punto de intersección de las dos generatrices interiores determinan el único punto plano de la superficie que es el **(3/2, 0, 3/2)**. La estructura formal puede ser representada con la línea de estricción (**l.e.**), sus generatrices de puntos parabólicos (**gP**) y los puntos singulares (**pS**) y planos (**pO**). En la figura 28 se muestran estos elementos con sus posiciones relativas y el esquema formal que permanece invariable en tanto el eje no se coloque paralelo al plano de la directriz.

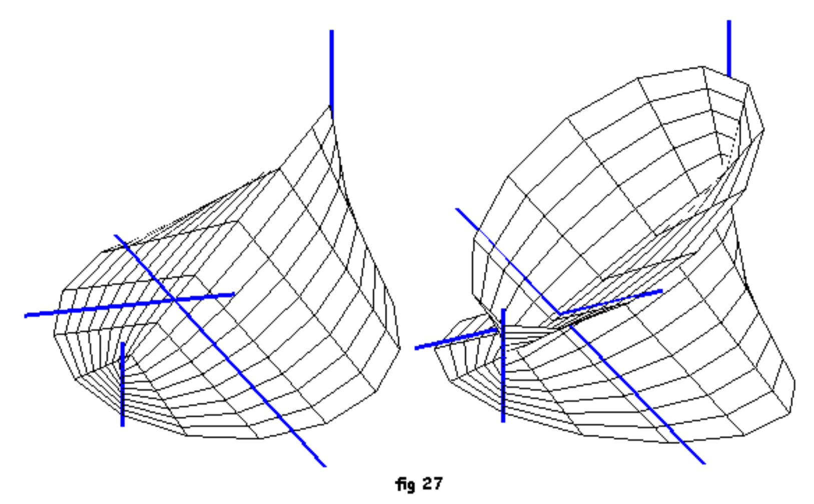
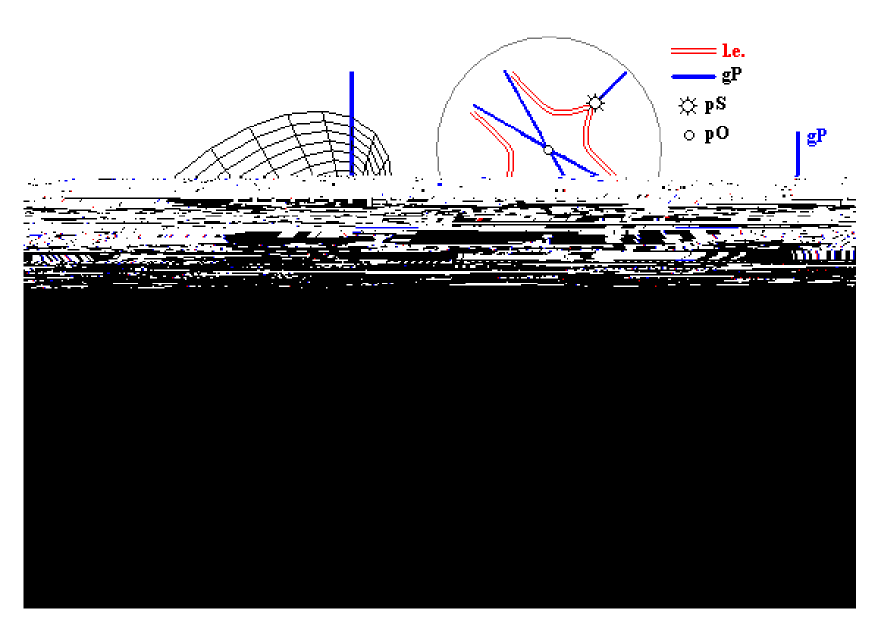


fig 27

Cuando las directrices tienen un punto de contacto esta estructura cambia. Podemos contemplarlo cuando consideramos la misma circunferencia con eje la recta **x + z = 2 , y = 0**. Las dos directrices tienen ahora el punto común **(2, 0, 0)** –figura 29–. Tomaremos como parametrizaciones de ambas directrices las **(1+cos μ, sen μ, 0)** y **(λ, 0, 2–λ)**. La dirección de las generatrices podrán expresarse por el vector **d** = {**λ – 1 –cos μ, –sen μ, 2–λ**} que, por ser normal al plano director, se convertirá en el **d** = {**0, –sen μ, 1–cos μ**}; con estas direcciones obtenemos la parametrización:

(1+ cos u, (1–v) sen u, v (1–cos u)) =
= (1+ cos u, sen u, 0) + v {0, –sen u, 1–cos u},



cuyos puntos singulares son **(0, 0,2)** y **(2, 0, 0)**. Ambos están sobre la línea de estricción:

(1+ cos u, sen u (1 + cos u), –cos u (1–cos u))

pero tienen características diferentes. Esta línea de estricción tiene un único punto de retroceso en el punto **(0, 0,2)** donde la generatriz correspondiente tiene la dirección del eje **OZ**. La tangente a la línea de estricción en el **(2, 0, 0)** tiene la

dirección del eje **OY** pero en ese punto la generatriz de la superficie se ha convertido en un punto. En la figura 30 se muestra la línea de estricción y la generatriz cilíndrica junto a un esquema de la estructura de la forma.

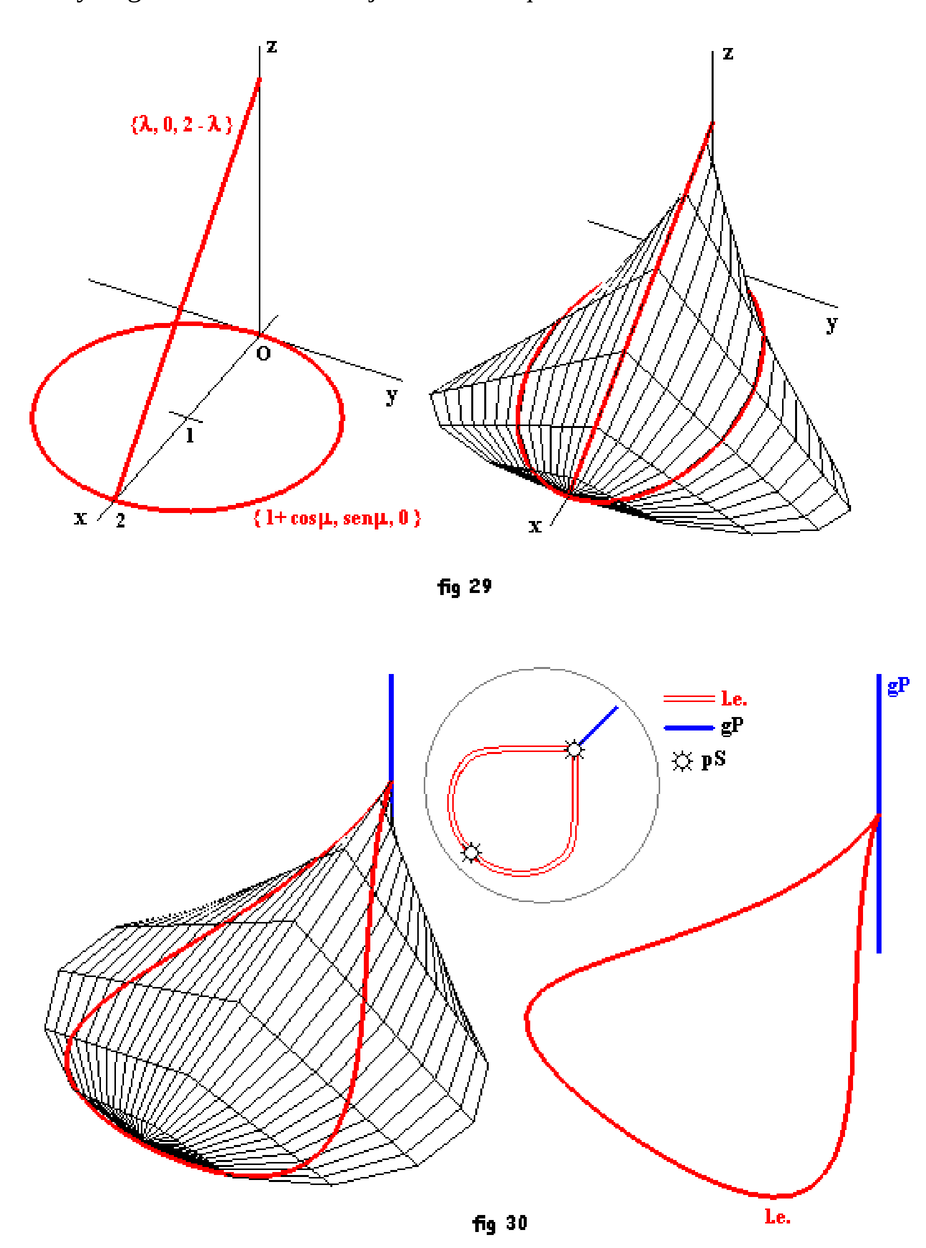


fig 29

fig 30

Es significativo analizar el caso en que el contacto no se verifica en uno de los puntos singulares estructurales "de cuña". Si tomamos como eje la recta **x + z = 1 , y = 1,** las dos directrices tienen ahora el punto de contacto **(1, 1, 0)** como se muestra en la figura 31. Las dos directrices parametrizadas serán respectivamente **(1 + cos μ, sen μ, 0)** y **(λ, 1, 1–λ)**. La dirección de las generatrices será la **d** = {**λ – 1 –cos μ, 1–sen μ, 1–λ**} que debe ser normal al plano director así que **d** = {**0, 1–sen μ, –cos μ**} y de esta manera podremos obtener la parametrización**:**

(1+ cos u, v + (1–v) sen u, –v cos u) =

=(1+ cos u, sen u, 0) + v {0, 1 –sen u, –cos u}

cuya línea de estricción es:

(1+ cos u, sen u + $\mathbf{cos^2}$ **u, – cos u (1 + sen u))**

Existen ahora, en primer lugar, los puntos singulares **(2, 1,–1)** y **(0, 1,1)** en los que las generatrices de puntos parabólicos correspondientes son tangentes a la línea de estricción. Aquí hay además un tercer punto singular, el **(1, 1, 0)**, también sobre la línea de estricción, en el cual la generatriz se convierte en un punto. No hay puntos planos en esta superficie. En la figura 32 se muestra la línea de

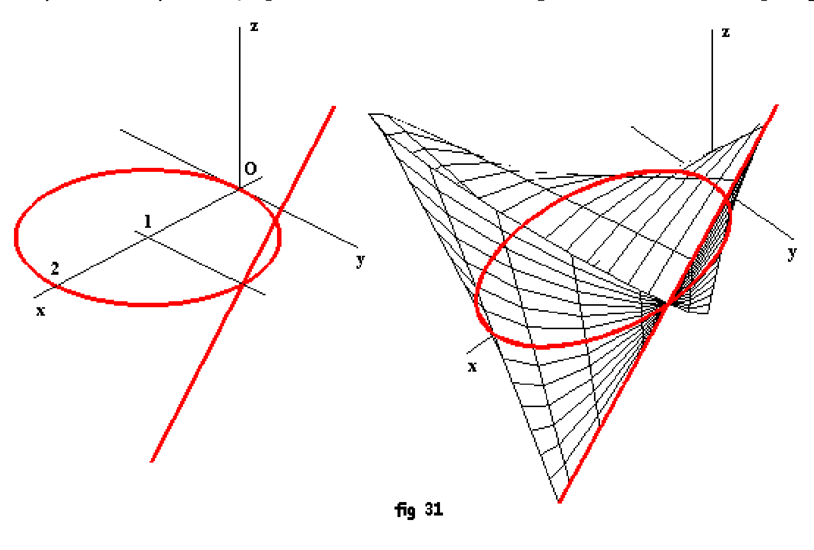


fig 31

estricción y las dos generatrices cilíndricas junto al esquema formal de la superficie.

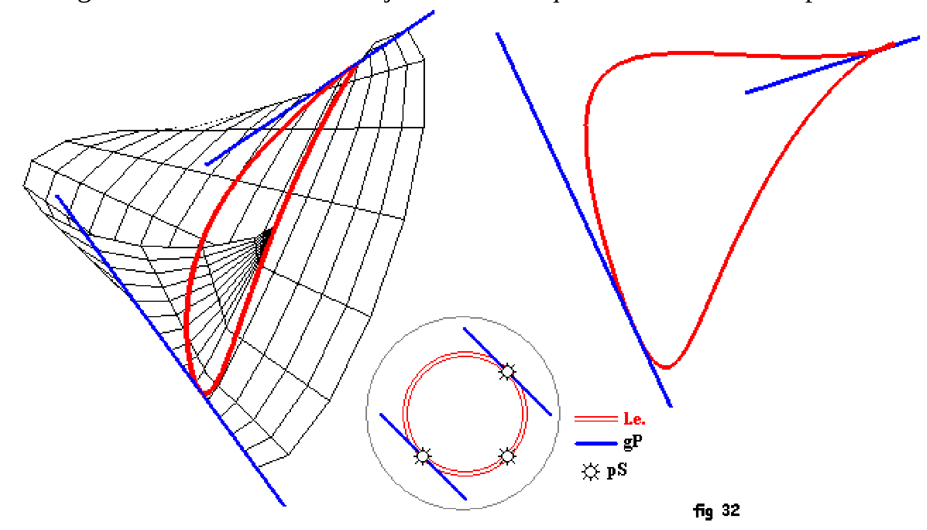


fig 32

Consideremos ahora, para finalizar, el caso en que el eje atraviese la directriz. (fig 33). El eje es la recta **x + z = 1 , y = 0** y las dos directrices podrán ser **(1+cos μ, sen μ, 0)** y **(λ, 0, 1–λ)**. La dirección de las generatrices vendrá determinada por la función

$\underline{\mathbf{d}} = \{\lambda - 1 - \cos\mu, -\mathrm{sen}\,\mu, 1-\lambda\}$

que deberá ser normal al plano director por lo que se convertirá en la

$\underline{\mathbf{d}} = \{0, -\mathrm{sen}\,\mu, -\cos\mu\}$

y con ella podremos escribir la parametrización:

$(1+\cos u, (1-v)\,\mathrm{sen}\,u, -v\cos u) =$

$= (1+\cos u, \mathrm{sen}\,u, 0) + v\,\{0, -\mathrm{sen}\,u, -\cos u\}$

fig 33

cuyos puntos singulares son **(2, 0, –1)** y **(0, 0, 1)** que son puntos de retroceso de la línea de estricción:

$(1 + \cos u, \mathrm{sen}^3 u, -\cos^3 u)$

Hay dos generatrices de puntos parabólicos que pasan por los puntos singulares y no existen puntos planos. En la figura 34 se representan las propiedades de forma de la superficie.

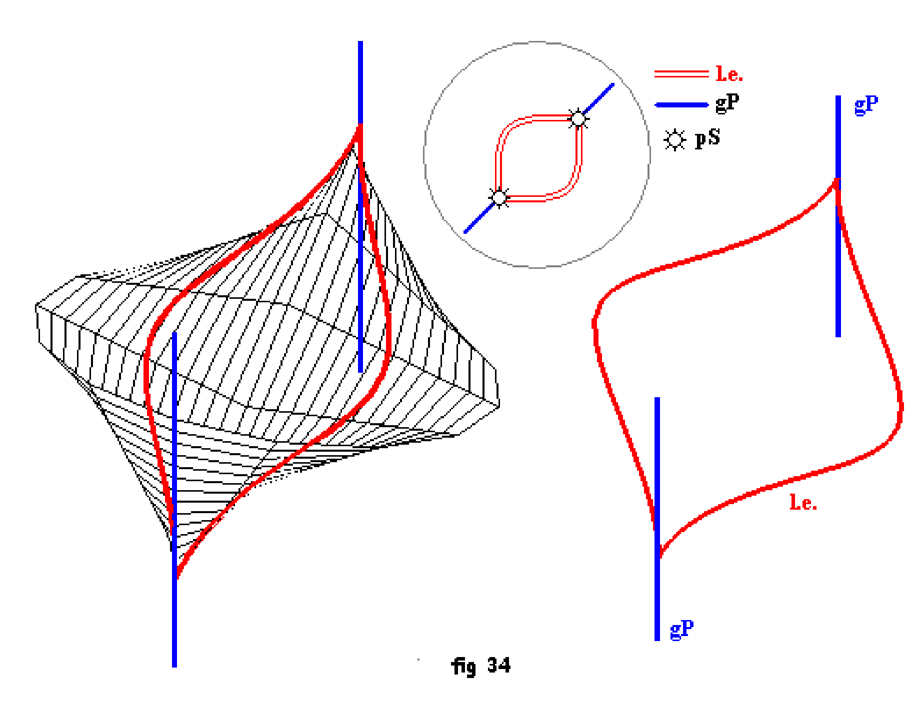


fig 34

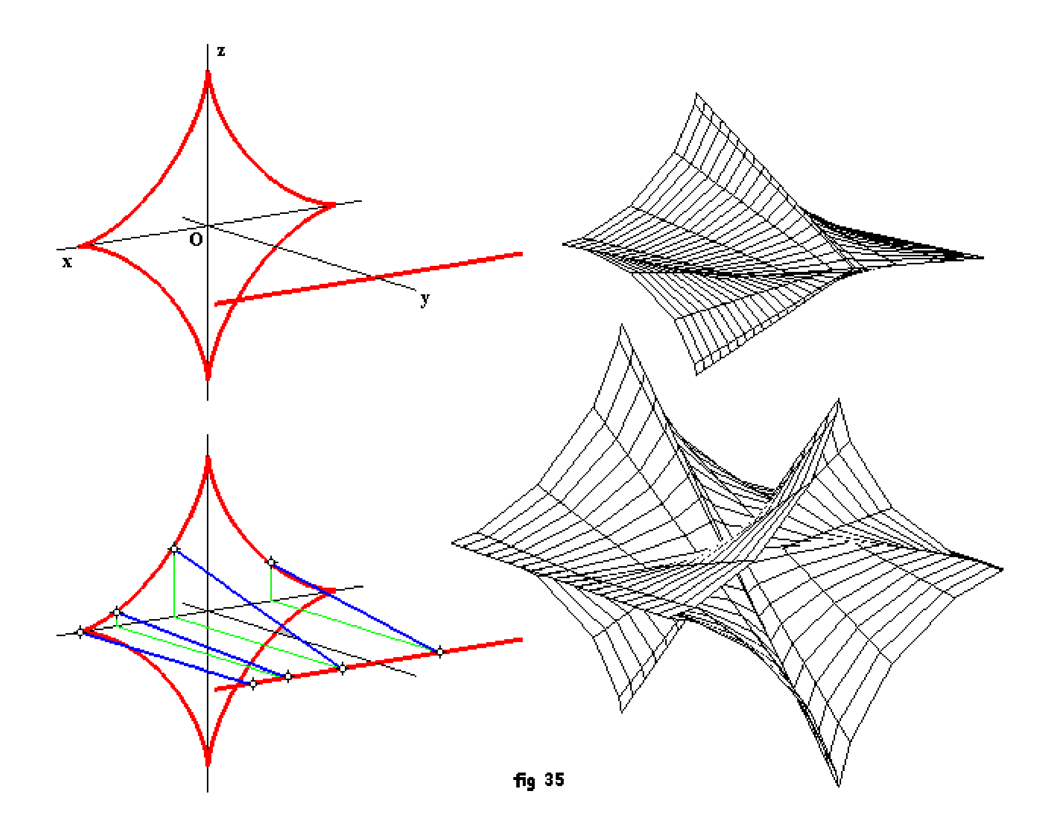


fig 35

05.- Cuñas oblicuas y rectas. La cuña de Wallis

Los conoides oblicuos generados con una directriz plana cerrada tal como una elipse, una circunferencia o una astroide con un eje paralelo al plano de la directriz proporcionan superficies cuya línea de estricción tiene dos puntos de retroceso que se convertirán en singulares de la superficie y cuatro generatrices cilíndricas con una estructura semejante a la del conoide de la figura 28. Estos conoides pueden ser denominados "**cuñas oblicuas**". En los conoides rectos esta línea de estricción de cuatro ramas se convierte en una recta conservando las cuatro generatrices de puntos parabólicos y generando un punto plano en la intersección de dos de ellas. Constituyen el conjunto de las "**cuñas rectas**". La figura 35 muestra una cuña recta de traza astroidal y su extensión a ambos lados de las directrices; las singularidades heredadas de la directriz curva enmascaran la estructura básica del conoide. Pueden ser exploradas otras curvas o lazos cerrados menos convencionales como un bucle de cardioide, por ejemplo, que proporciona una arista interior (figura 36) o más complejas como el folium de varias hojas que agrupa varias cuñas simples (figura 37) etc.

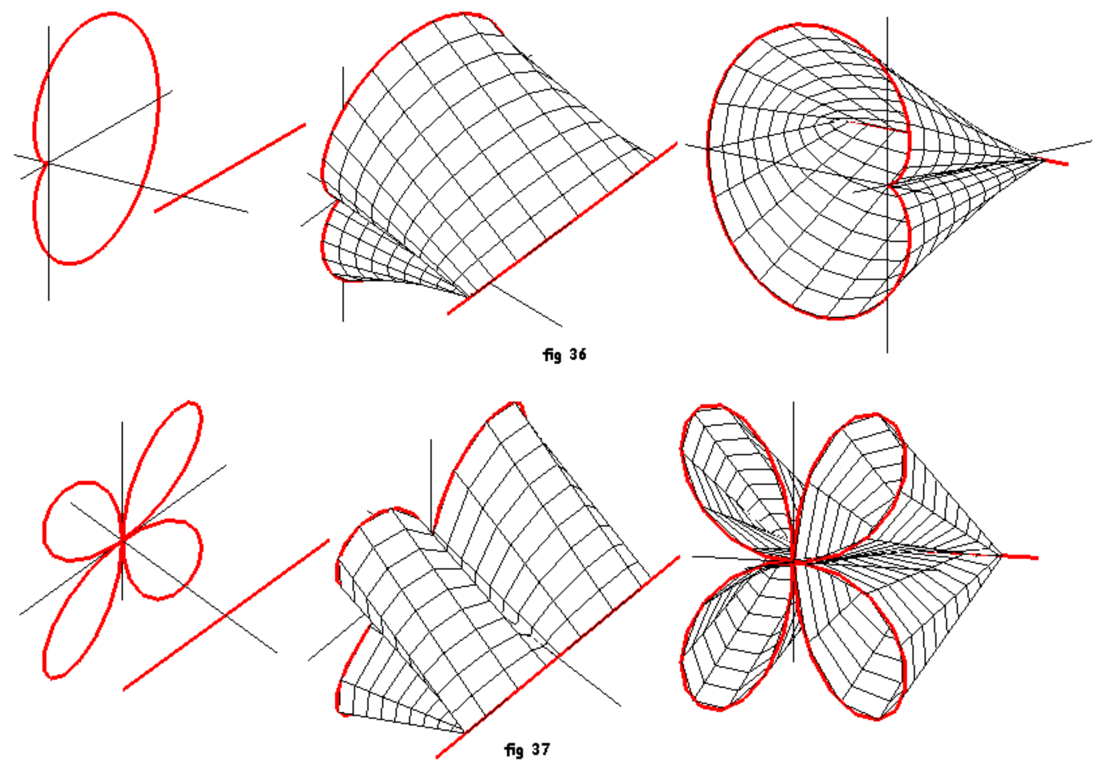


fig 36

fig 37

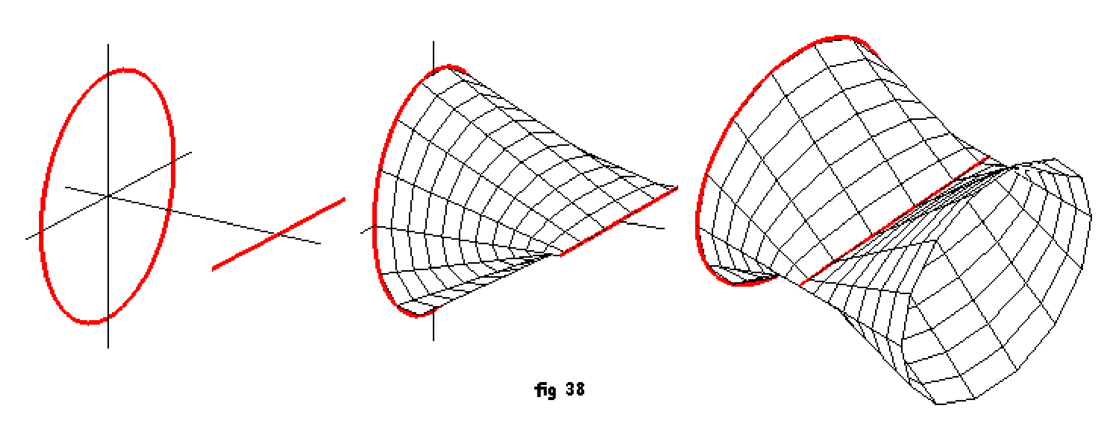


fig 38

El conoide recto más representativo es el generado con una circunferencia y un eje paralelo a su plano de manera que la proyección ortogonal de este eje sobre el plano de la circunferencia sea uno de sus diámetros (figura 38). Esta posición relativa no cambia la estructura de la forma que permanece invariable sea cual sea la posición del eje siempre que se conserve paralelo al plano de la directriz curva, pero con las condiciones de simetría se singulariza este interesante objeto geométrico que podemos denominar "**bóveda conoidal**", "**rincón cónico**" o bien "**cuña de Wallis**". El esquema de la forma es el que se muestra en la figura 39: la línea de estricción es un segmento rectilíneo con dos puntos singulares en sus extremos por el que pasan dos generatrices cilíndricas. Hay además otras dos generatrices de puntos parabólicos interiores que determinan en su intersección el punto plano. Existen referencias "teóricas" de esta superficie considerada una bóveda de arista en tratados franceses de estereotomía o de cortes de cantería desde antes del siglo XVIII (Arrière-voussures de Saint Antoine o de Marseille etc.) Es la transición curvada más simple y productiva entre una recta y una circunferencia. En mayor o menor medida la encontramos en una gran variedad de elementos cotidianos (figura 40)

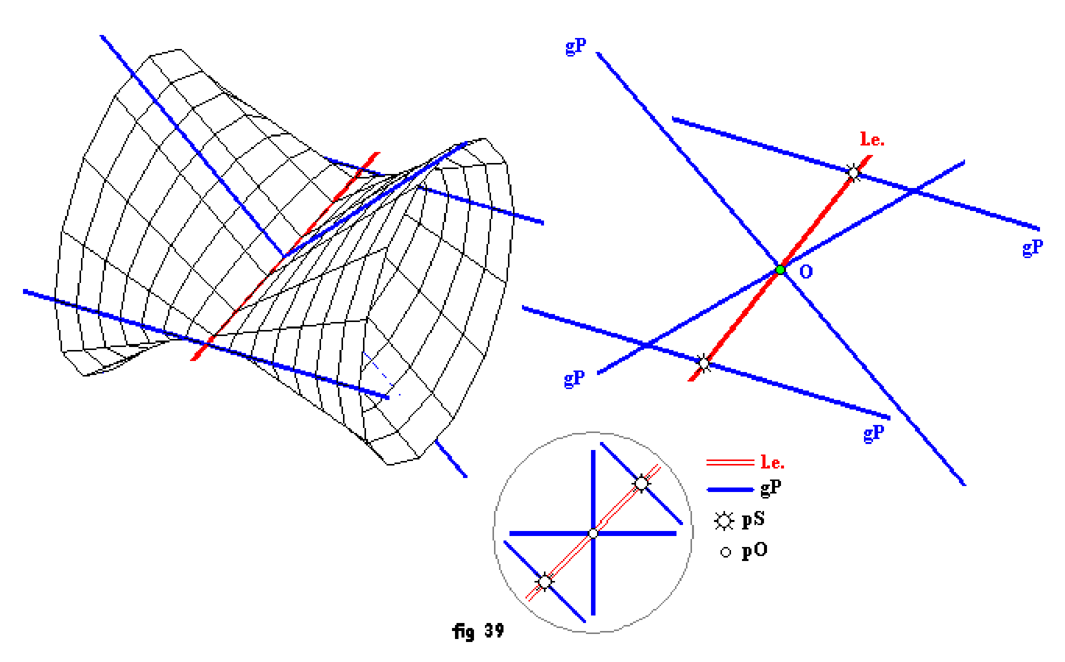


fig 39

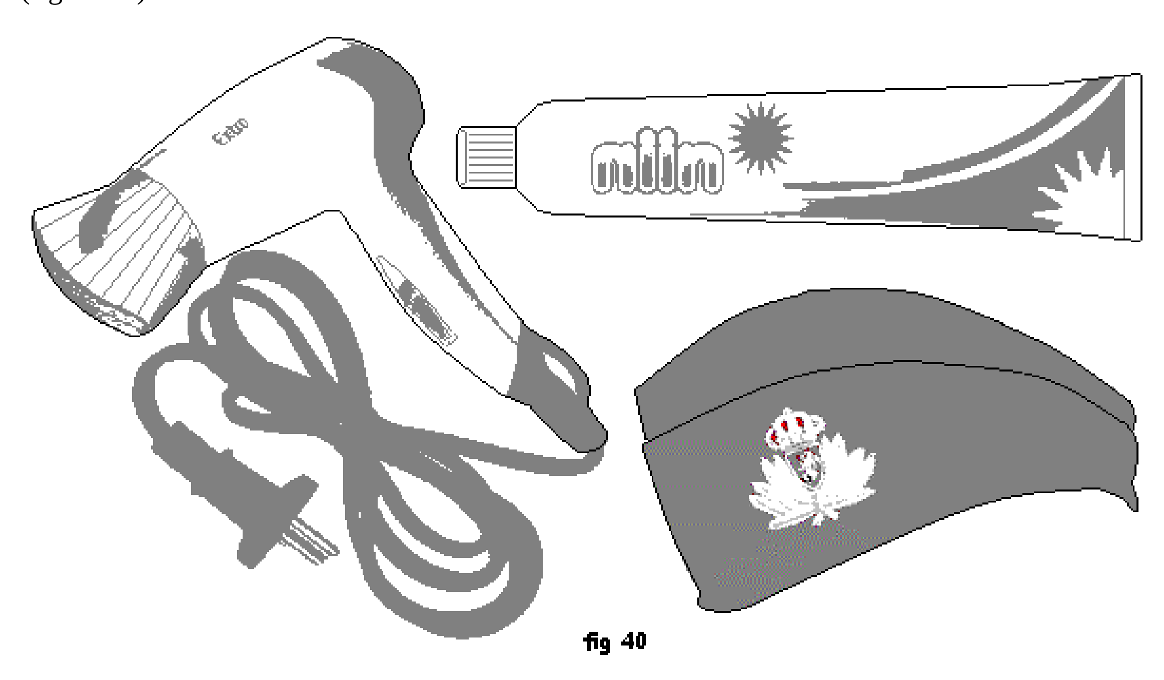


fig 40

Podemos presentar el fragmento entre directrices de la cuña de Wallis como una bóveda de una arista sobre planta circular. Si describimos la planta circular de radio "**R**" en el plano **z = 0** y centro el origen de coordenadas con la parametrización **(R cos μ, R sen μ, 0)** y el eje a una altura "**a**" con la parametrización **(0, λ, a)**, siendo el plano director el **XOZ,** la superficie puede describirse por **(R(1–v) cos u, R sen u, a v) = (R cos u, R sen u, 0) + v {–R cos u, 0, a}**, habiendo tomado como directriz la circunferencia.

Las generatrices de puntos parabólicos se obtienen para los valores "**u**" de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} -R \text{ sen } u & R \cos u & 0 \\ -R \cos u & 0 & a \\ R \text{ sen } u & 0 & 0 \end{vmatrix} = a R^2 \text{ sen } u \cos u = 0$$

, cuyos valores **0**, **π/2**, **π** y **3 π/2** nos dan las generatrices:

(R, 0, 0) + v {–R, 0, a} ; **(0, R, 0) + v {0, 0, a}** ; **(–R, 0, 0) + v {R, 0, a}** ; **(0, –R, 0) + v {0, 0, a}**.

Los puntos singulares se determinan para **u = π/2**, **v = 1** y **u = 3 π/2**, **v = 1**, es decir, los **(0, R, a)** y **(0, –R, a)**. La línea de estricción es el eje **(0, R sen u, a)** y existe un único punto plano **(0, 0, a)** que, no siendo singular, anula simultáneamente a **e*** y **f***. Es el punto de intersección entre las generatrices cilíndricas interiores **((1–v) R, 0, a v)** y **((–1+ v) R, 0, a v)**.

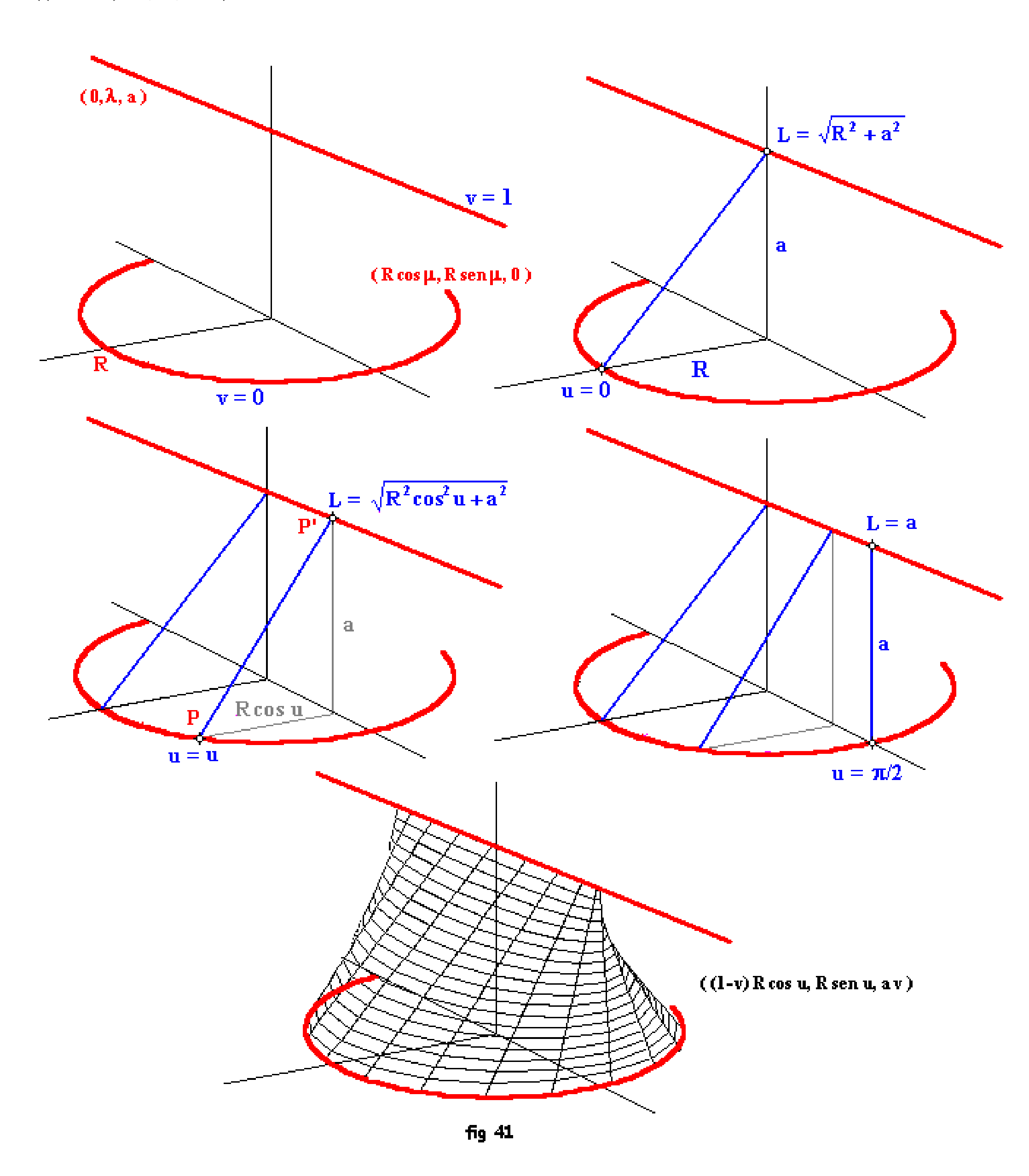


fig 41

Al ser un conoide recto, el trazado de las rectas o bien. el replanteo de las generatrices es sencillo (figura 41) pues en cada punto **P** de la planta basta trazar su proyección sobre el eje **OY** con auxilio de una paralela al eje **OX** y levantar una perpendicular al plano de planta hasta encontrar el punto **P'** del eje.

Las generatrices unen los puntos genéricos de la directriz circular
(R cos u, R sen u, 0)
con el correspondiente del eje
(0, R sen u, a)
así que, limitándonos al fragmento de la bóveda entre directrices, las longitud de cada segmento de generatriz será

$$L = \sqrt{R^2 \cos^2 u + a^2}$$

que variará entre el valor máximo $\sqrt{R^2 + a^2}$ y el valor "**a**" correspondientes a los segmentos de las generatrices cilíndricas tal y como se muestra en la figura 41.

§ 4.06.- Un conoide muy notable: el paraboloide hiperbólico

Desde un punto de vista constructivo el paraboloide hiperbólico es la única superficie curvada con plano director que enlaza dos rectas no paralelas en planos paralelos (figura 42a) donde el plano director no puede ser paralelo a ninguna de las dos directrices. Es, por lo tanto, un conoide recto u oblicuo con dos ejes y un plano director que los corta. Cualquiera de los dos planos que contienen a las directrices determinan, a su vez, un segundo plano director y un segundo conjunto de generatrices que cortan a todas y cada una de las rectas de la familia inicial. Se dice, por tanto, que es una superficie "doblemente reglada". En la figura 42b observamos que cada generatriz está en un plano paralelo a dos cualesquiera de la misma familia por lo que esta superficie puede ser generada por rectas que se apoyen en tres rectas no paralelas en planos paralelos. Esta superficie no tiene puntos singulares ni generatrices de puntos parabólicos y su línea de estricción es o bien una parábola o bien una recta. Sucintamente pero sin ninguna pérdida de generalidad podemos situar una directriz $\mathbf{D_1}$ sobre el eje **OX** y la otra $\mathbf{D_2}$ en el plano **y = a** con **x = α z** (figura 43). Siendo el plano director **A' x+B' y+C' z+D' = 0**, las primeras limitaciones son **A' ≠ 0** y **α A' + C' ≠ 0** que representarían planos paralelos a cada una de las dos directrices por lo que podemos considerar directamente el plano **x + B y + C z + D = 0** con la condición de ser α ≠ – **C** de esta manera todos los paraboloides hiperbólicos se encuentran representados por la formulación:

(α u + (1 – v) (C u + B a), a v, u v)

y de aquí pueden extraerse sus propiedades generales.

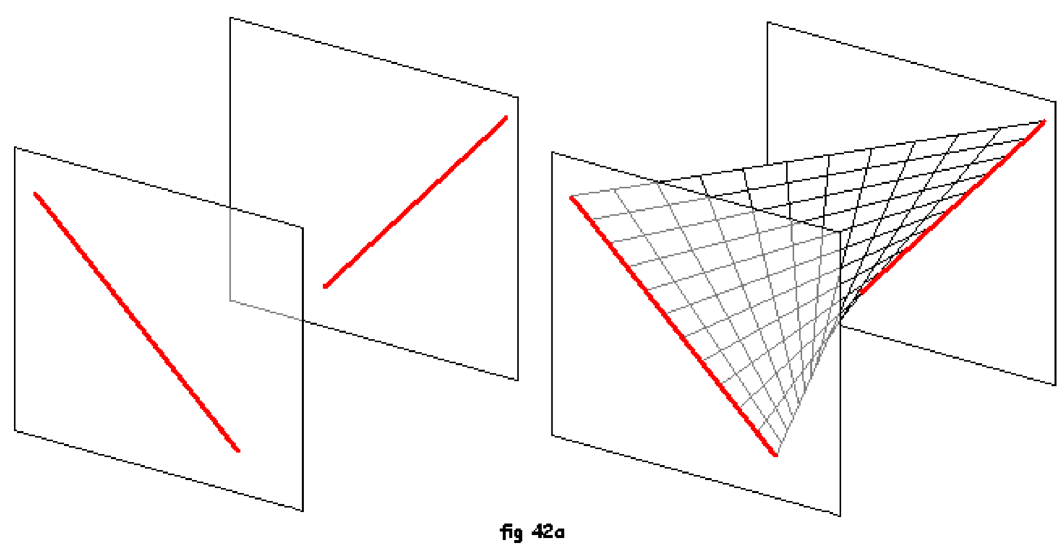


fig 42a

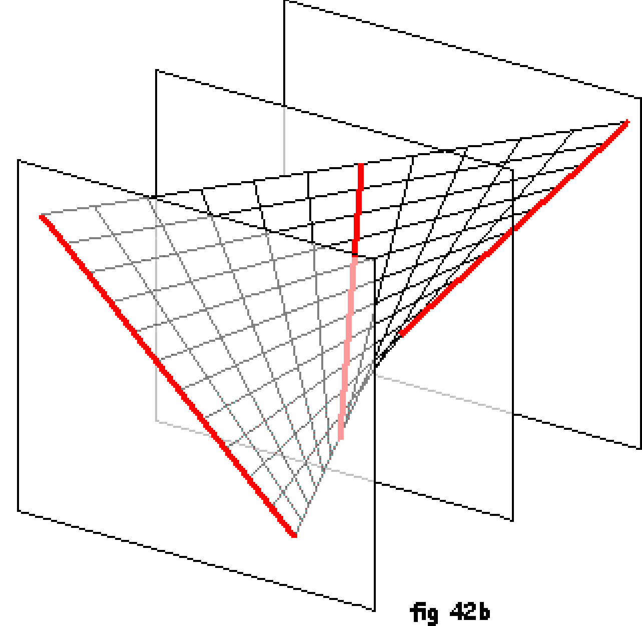


fig 42b

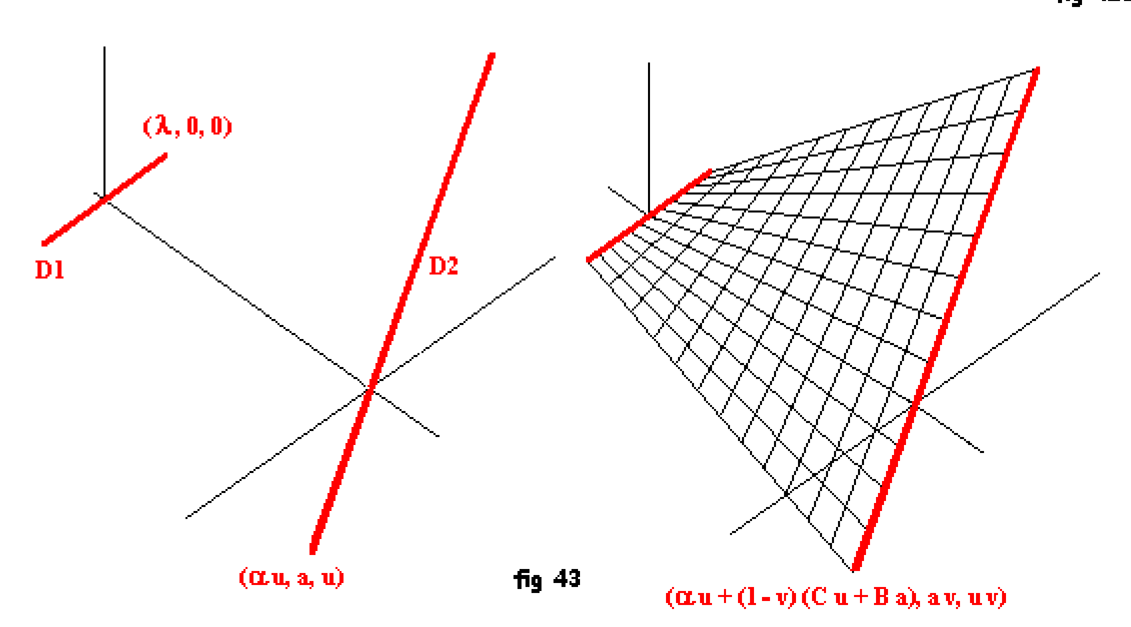


fig 43

Al ser el paraboloide hiperbólico un conoide, sea recto u oblicuo, el trazado de sus generatrices resulta sencillo si representamos dos de las trazas del plano director sobre los coordenados (figura 44) tal y como hemos visto en **§ 4.03**.

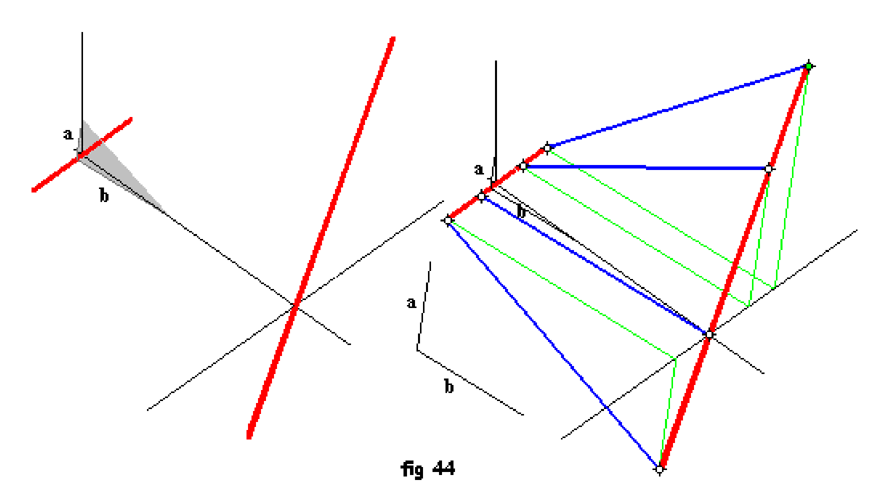


fig 44

Del conjunto de todos estos paraboloides se puede extraer una familia de conoides rectos en los que el plano director es de la forma $\alpha \mathbf{x} + \mathbf{z} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$ perpendicular a la directriz **(α u , a, u)** y otra familia en los que el plano director es perpendicular al eje **OX**, es decir, con la forma $\mathbf{x} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$, lo que determina respectivamente los dos conjuntos de conoides:

$$\left(\alpha\, \mathbf{u} + \frac{\mathbf{1}}{\alpha} (\mathbf{1} - \mathbf{v})\, \mathbf{u},\ \mathbf{a\, v},\ \mathbf{u\, v} \right)$$

y

(α u, a v, u v), ambos con $\alpha \neq \mathbf{0}$.

Por simplicidad representamos esta segunda familia de los conoides rectos con plano director **YOZ** cuyos ejes son las rectas **(0, λ, 0)** y **(α u , a, u)**. El trazado de las generatrices de estos conoides resulta sencillo (figura 45).

fig 45

Aunque desde el punto de vista de la forma esta superficie no presenta anomalías ni singularidades, son varias las circunstancias que la hacen muy interesante en el campo del diseño, en la ingeniería y la arquitectura. Es inevitable recordar aquí que esta superficie puede generarse también por traslación lo que aporta otras posibilidades constructivas, pero refiriéndonos solamente al aspecto del diseño, una de ellas es la posibilidad de delimitar, eligiendo diferentes intervalos de los parámetros, fragmentos diferentes con bordes rectos o curvados en parábola que pueden adaptarse a otros perímetros o proyecciones. El fragmento más significativo con bordes rectos es el que proyecta un cuadrilátero sobre el plano horizontal de ahí que esta superficie sea también denominada "cuadrilátero alabeado".En la figura 46 se presenta este fragmento y algunos otros inmediatamente derivados de él, todos más o menos explorados como elementos

constructivos. Después está la extraordinaria capacidad de acoplamiento o ensamblaje de estos fragmentos entre sí lo que da lugar a un interminable juego de posibilidades obteniendo diferentes superficies de cubrición o revestimiento

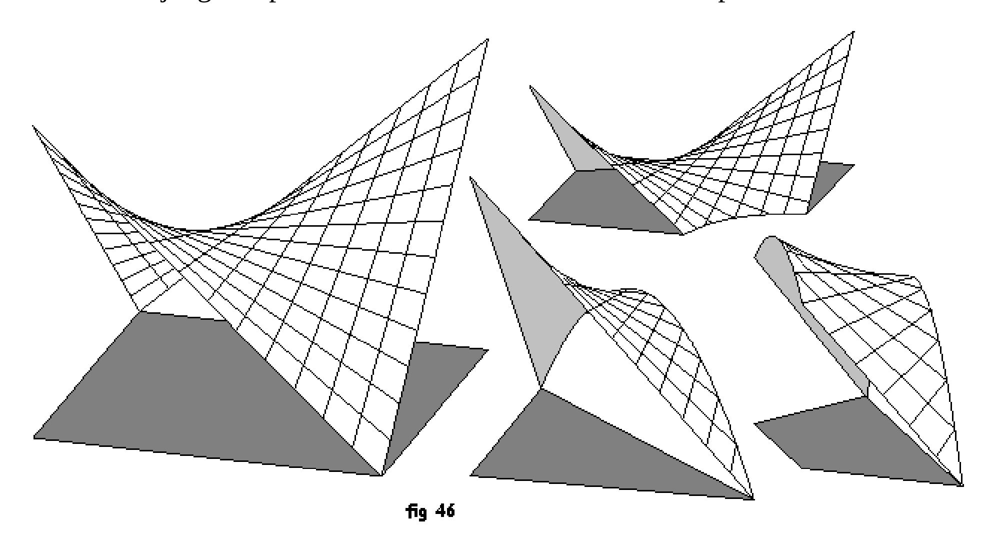


fig 46

adaptadas a los límites más variados. En la figura 47 se representan las ocho variantes esencialmente diferentes de cubrición de una planta cuadrada utilizando cuatro fragmentos de paraboloide hiperbólico con bordes rectos y diferentes condiciones de simetría. Muchos de ellos han sido ampliamente utilizados en edificación.

fig 47

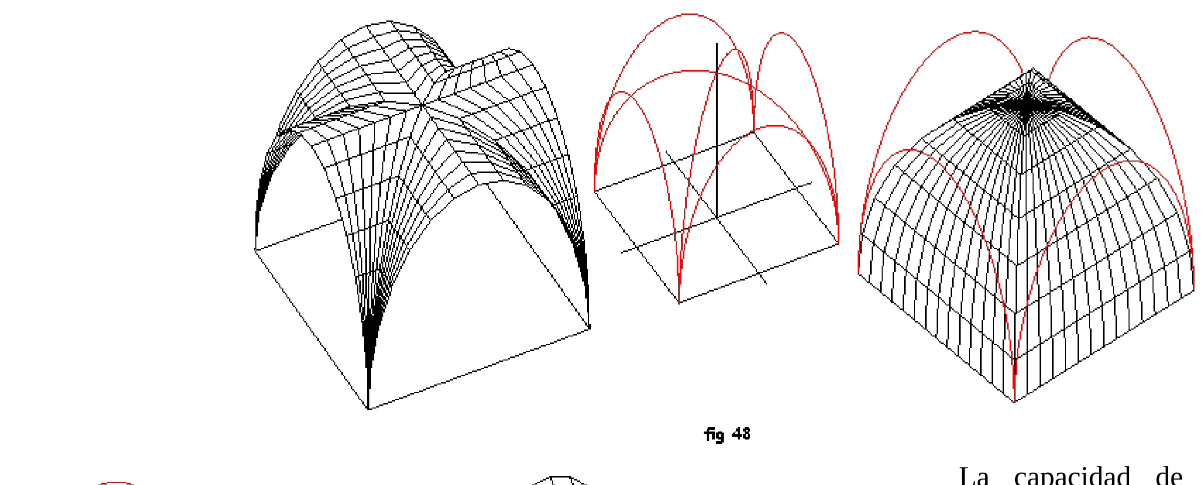


fig 48

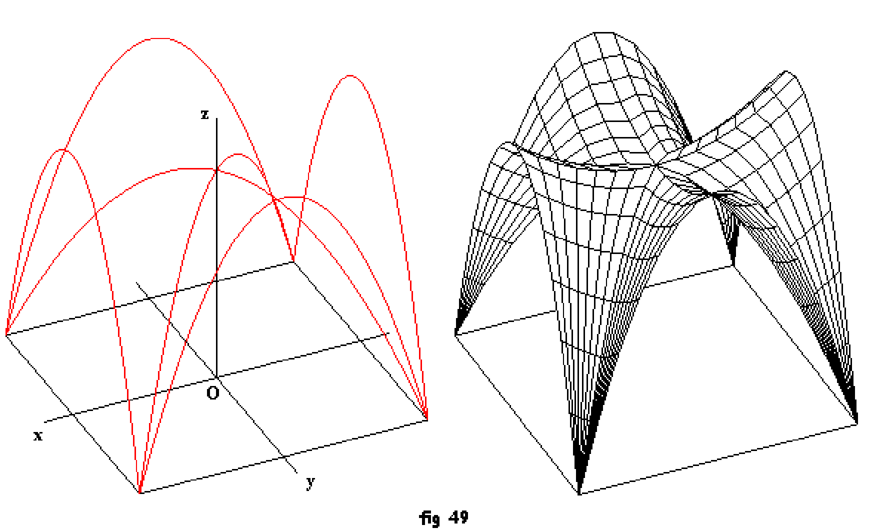


fig 49

La capacidad de adaptación de esta superficie permite sustituir con ventaja, por ejemplo, cualquiera de las dos formas duales del encuentro ortogonal de dos bóvedas de cañón cilíndricas de directriz circular (figura 48), es decir: el "rincón de claustro" o la "bóveda de arista". Podemos generar una bóveda de arista similar pero utilizando dos paraboloides hiperbólicos con la notable ventaja de superar el mismo encuentro con superficies de doble curvatura (figura 49) Es así como en 1954 F. Candela construyó bajo proyecto de De la Mora y López Carmona la cubrición de la Sala de remates de la Bolsa de Valores de México, un proyecto histórico por su audacia. Después hay decenas de ejemplos de su uso como cascarón de cubrición o revestimiento en todas las escalas posibles (figura 50) destacando por su novedad y belleza arquitectónica el Restaurante Los Manantiales de 1958 (F Candela y Álvarez Ordóñez), un encuentro similar con cuatro paraboloides.

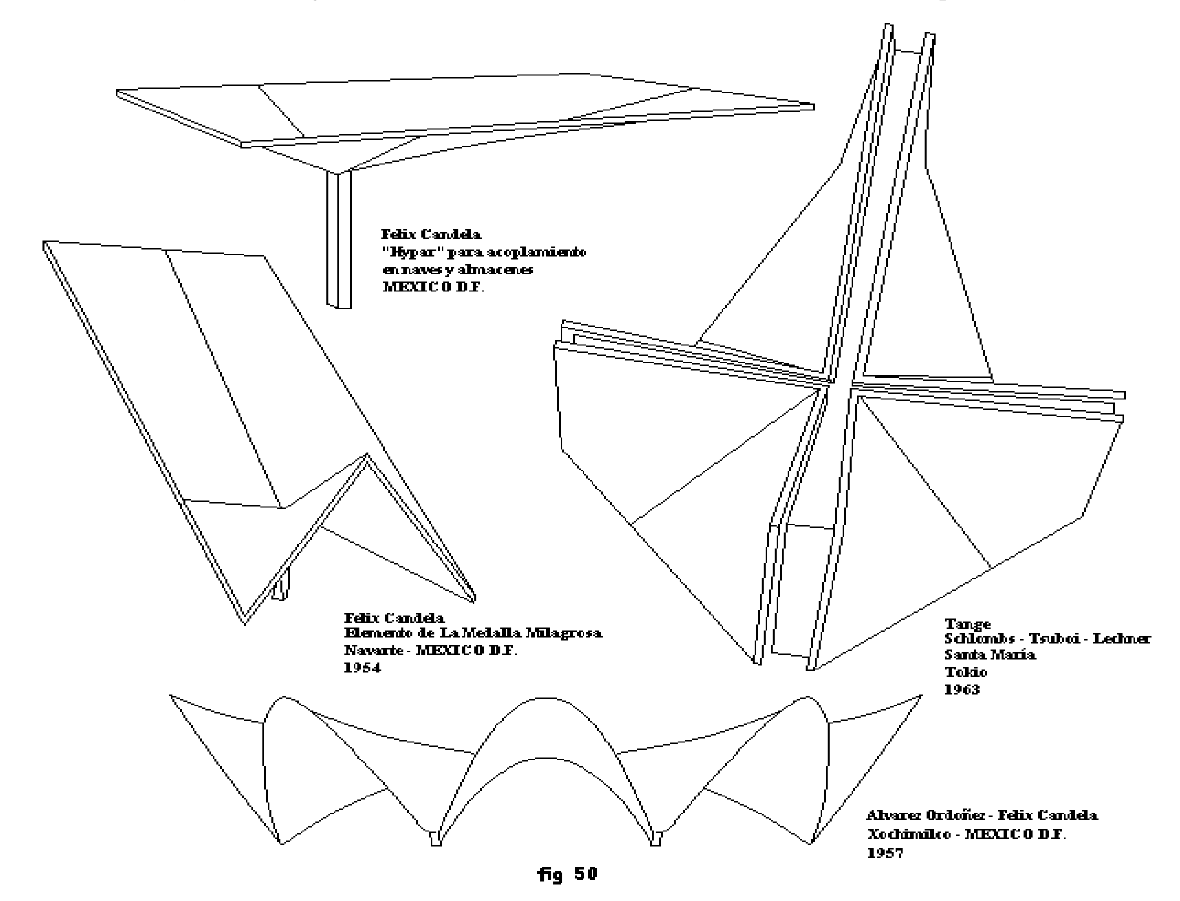
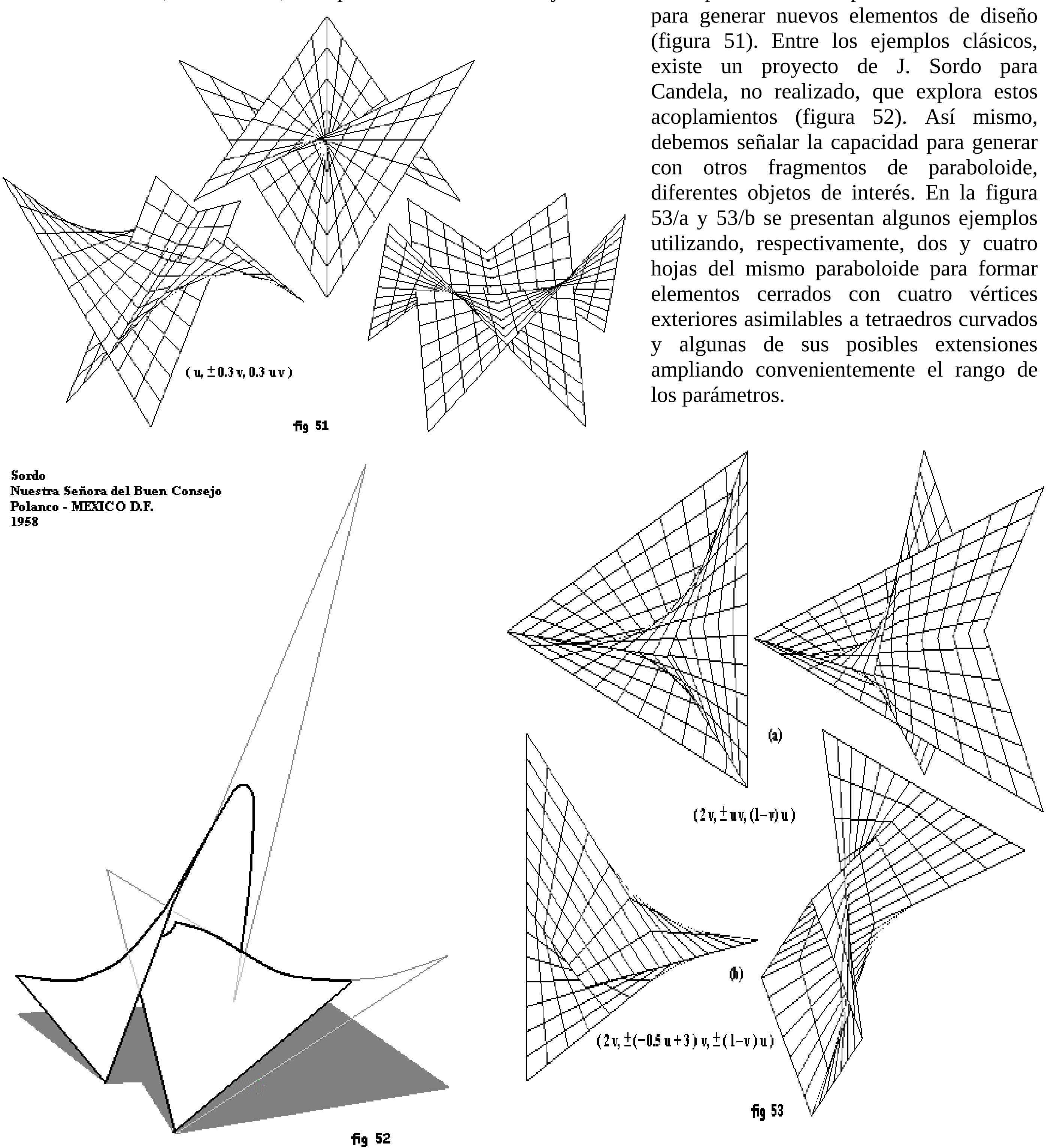


fig 50

Cabe destacar, así mismo, las posibilidades de encajamiento entre paraboloides hiperbólicos similares para generar nuevos elementos de diseño (figura 51). Entre los ejemplos clásicos, existe un proyecto de J. Sordo para Candela, no realizado, que explora estos acoplamientos (figura 52). Así mismo, debemos señalar la capacidad para generar con otros fragmentos de paraboloide, diferentes objetos de interés. En la figura 53/a y 53/b se presentan algunos ejemplos utilizando, respectivamente, dos y cuatro hojas del mismo paraboloide para formar elementos cerrados con cuatro vértices exteriores asimilables a tetraedros curvados y algunas de sus posibles extensiones ampliando convenientemente el rango de los parámetros.



§ 4.07.- Un conoide extraordinario: el helicoide recto. Helicoides reglados. Las superficies minimales.

En principio podemos generar un conoide recto sencillo con una hélice circular situada en un cilindro de traza circular sobre el plano **z = 0** y el eje **OZ**, eje del propio cilindro, obteniendo una superficie muy notoria asimilable a una gran cantidad de objetos geométricos presentes en todos los campos del diseño, desde tornillos metálicos a engranajes helicoidales y desde escaleras "de caracol" a algunas formas de las pastas alimenticias como los "fusilli" o "spiralini". La estructura básica del ADN es, geométricamente, una doble hélice pero sus bases nitrogenadas la convierten en un objeto en cierto modo similar al helicoide (figura 54).

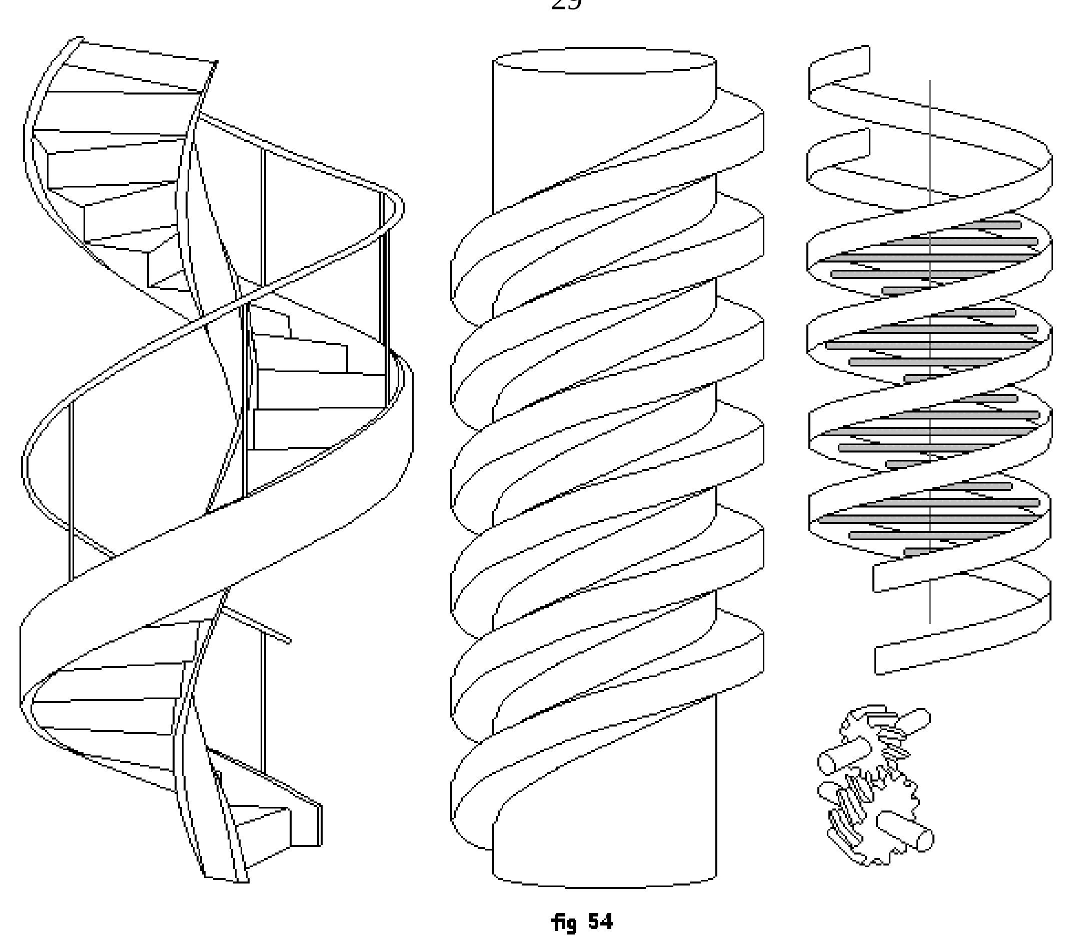


fig 54

Tomando como eje el **OZ**: **(0, 0, λ)** y como segunda directriz la hélice **(a cos u, a sen u, b u)** con plano director el **XOY**, la dirección de las generatrices deberá ser **{a cos u, a sen u, b u – λ}** condicionada a que **λ = b u**, con lo que obtenemos para esta superficie la parametrización intrínseca tradicional:

(v cos u, v sen u, b u) =(0, 0, b u) + {cos u, sen u, 0}

que se presenta en la figura 55/a .Otras parametrizaciones nos permiten representar este mismo objeto reconstruido con dos familias de hélices (figura 55/b) o en función de sus líneas de curvatura (figura 55/c).

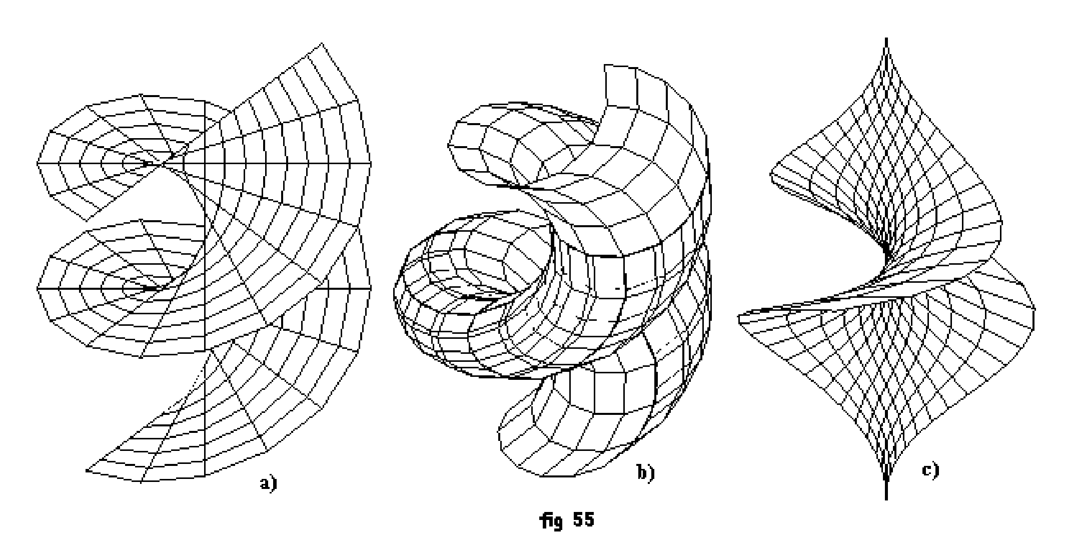


fig 55

Este conoide es conocido como el "**helicoide recto**". La escalera de caracol simple es asimilable a medio helicoide (figura 56/a). Las "dos hojas" de un helicoide recto constituyen justamente un helicoide completo (figura 56/b). La idea de la rampa de "ascenso continuo" de una hoja de helicoide –un fragmento de medio helicoide– (figura 57/a), con mayor o menor pendiente, ha sido llevado dentro de la arquitectura al nivel simbólico como en el museo S. Guggenheim de Frank Lloyd Wright o conservada en el puramente práctico como en multitud de rampas de ascenso o descenso de garajes. La "propiedad" de la hoja del helicoide completo también ha sido amplia y bien aprovechada arquitectónicamente. Desde la célebre "doble escalera" del castillo de Chambord, atribuida a Leonardo da Vinci, que

permitiría a las personas ascender y descender sin cruzarse directamente hasta las escaleras del Museo del Vaticano de G. Momo o las originales de Bramante (fig 57/b).

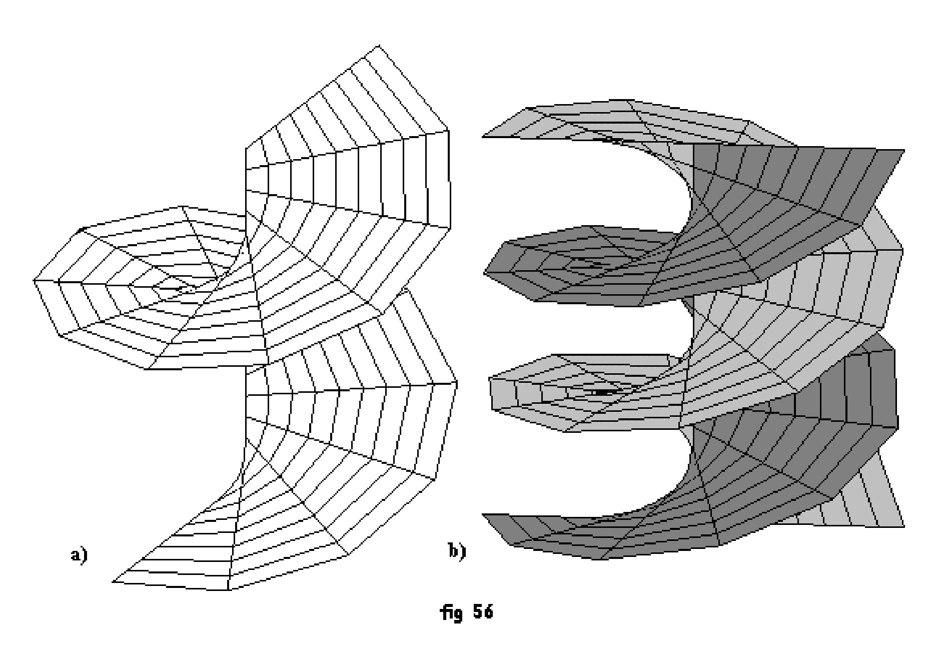


fig 56

Es usual denominar movimiento helicoidal o "giro helicoidal" al producto de un giro y una traslación paralela al eje de giro, pasando el eje a denominarse "eje helicoidal". En el campo de la generación de superficies nos referimos a movimientos de este tipo cuando el giro y la traslación pueden describirse en función de un solo parámetro o mejor, cuando la traslación puede expresarse explícitamente en función del ángulo girado. Aquí se nos presenta un problema de si asociamos lo "helicoidal" con las hélices o no, porque la traslación puede no ser de variación constante o, si se quiere, no ser de pendiente constante. Las superficies generadas por cualquier línea que se mueve con un giro respecto de una recta seguido de una traslación en dirección de la misma se denomina comúnmente "una superficie helicoidal" (figura 58). La traslación viene normalmente expresada respecto del giro e implícitamente se está considerando que la traslación es una función lineal del giro lo que supone una particularización. La recta base de la rotación más la traslación se convierte en "**eje**" de la superficie. Si la variación de la función que determina la traslación es constante entonces el punto móvil describe un arco de hélice sobre un cilindro de revolución. Sin embargo, si la traslación sigue una ley no lineal con respecto del giro, la trayectoria del punto móvil describe otro tipo de curva de proyección circular que no es necesariamente una hélice y la "superficie helicoidal" queda desvinculada de las curvas denominadas "hélices". Desde el punto de vista de la generación de superficies regladas este último caso puede resultar tan interesante como el tradicional en que lo helicoidal queda vinculado a las hélices circulares.

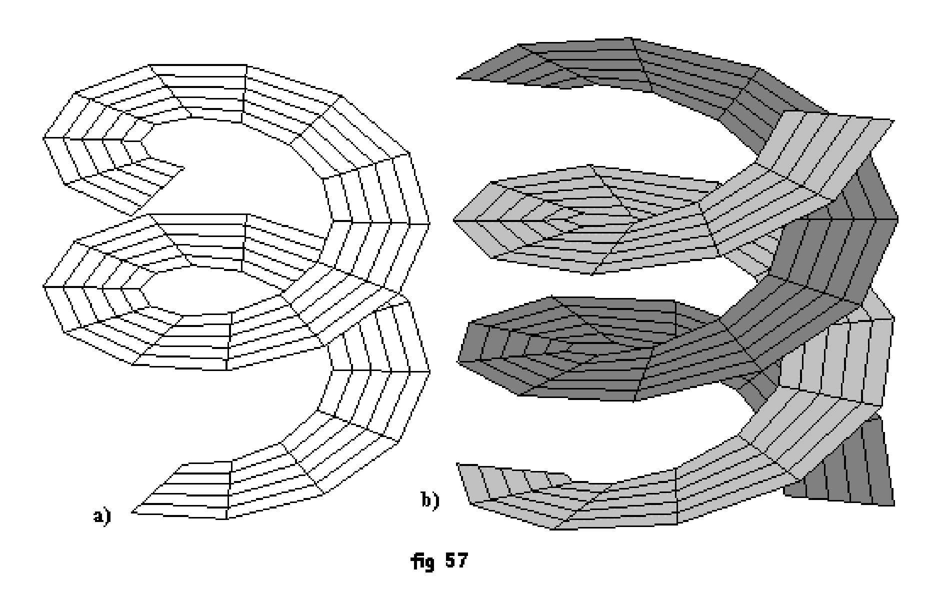


fig 57

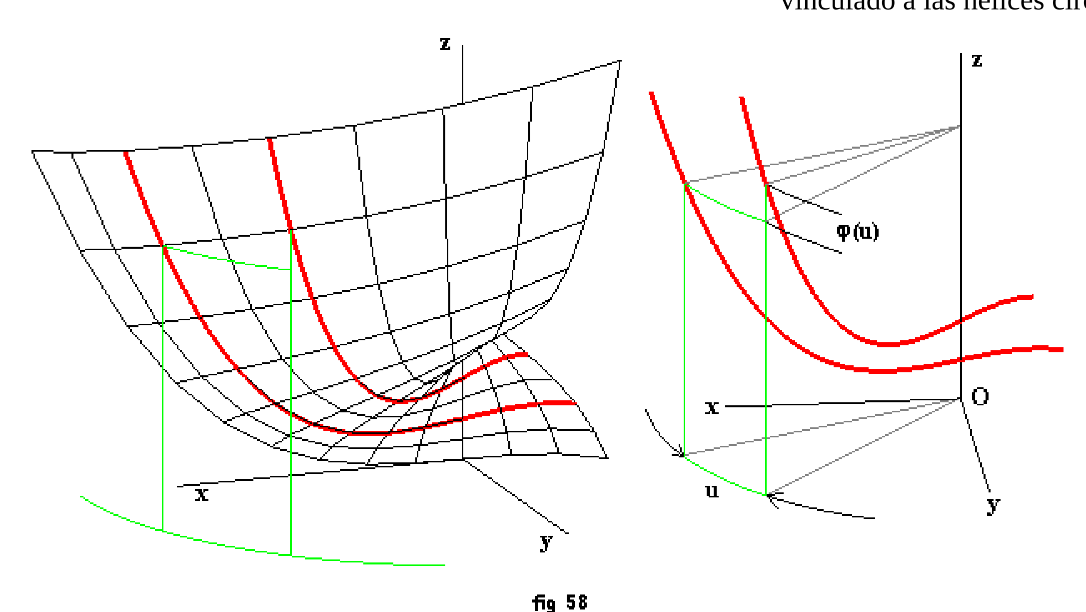


fig 58

Las simplificaciones de las representaciones analíticas son muy notables si se elige el eje **OZ** como eje de la superficie helicoidal. Considerando las superficies generadas por una recta $\underline{g}(v) = \{a + \alpha\, v,\ b + \beta\, v,\ c + \gamma\, v\}$ con movimiento "helicoidal" respecto del eje **OZ** y si la traslación –paralela al eje– puede escribirse en función del ángulo girado "**u**", las ecuaciones cartesianas de estas superficies regladas se podrán escribir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\, v + a \\ \beta\, v + b \\ \gamma\, v + c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi(u) \end{pmatrix}$$

Su representación vectorial correspondiente se convierte en:

$$\underline{r}(u, v) = \{(a + \alpha\, v) \cos u - (b + \beta\, v) \operatorname{sen} u,\ (a + \alpha\, v) \operatorname{sen} u + (b + \beta\, v) \cos u,\ c + \gamma\, v + \varphi(u)\} =$$

$$= (a \cos u - b \operatorname{sen} u,\ a \operatorname{sen} u + b \cos u,\ c + \varphi(u)) + v\, \{\alpha \cos u - \beta \operatorname{sen} u,\ \alpha \operatorname{sen} u + \beta \cos u,\ \gamma\}$$

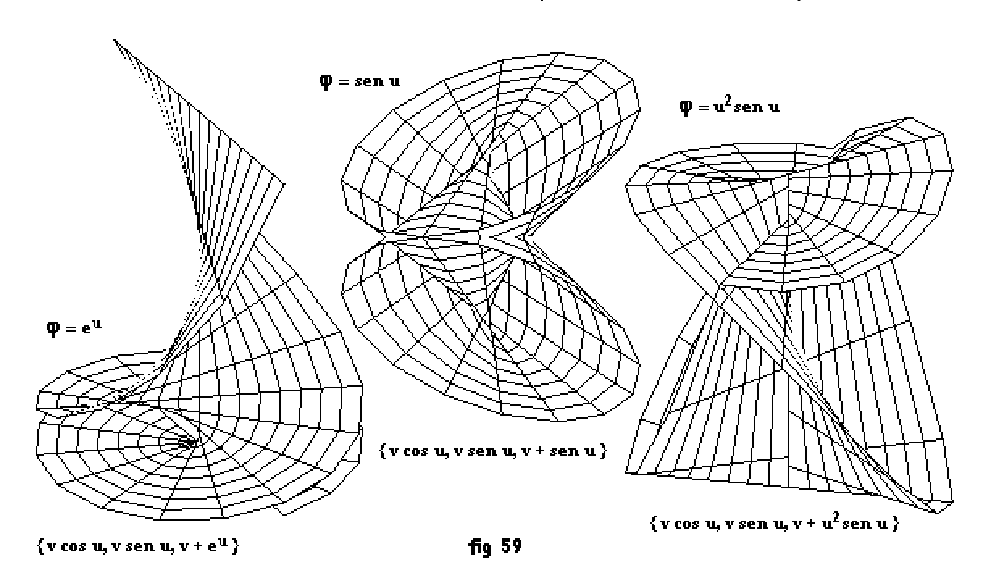


fig 59

Las curvas **u =cte** o "curvas **v**" de este conjunto de superficies son las generatrices formadas con la congruencia por el movimiento "helicoidal" de la recta $\underline{g}$ siendo el giro el determinante del cambio de dirección de las rectas. Podemos encontrar una amplia variedad de superficies según la función $\varphi(u)$ elegida pudiendo explorar las superficies resultantes al tomar funciones φ no lineales respecto del giro "**u**" tales como polinomios de grado dos o superior, funciones circulares, exponenciales etc. (figura 59). El parámetro de distribución de este conjunto amplio de superficies "helicoidales" nos determina que los únicos helicoides desarrollables que no son cilindros ni conos son los denominados helicoides reglados desarrollables en los que su arista de retroceso es, naturalmente, una de las hélices circulares de la superficie.

Como se ha dicho, se acostumbra a denominar "helicoides reglados" a las superficies regladas helicoidales en las que φ es una función lineal del parámetro "**u**" o cuando simplemente $\varphi(u) = h\, u$. En ocasiones se utilizará $\varphi(u) = \frac{h}{2\pi} u$ para ajustar el factor de escala al paso de hélice. En estas condiciones las congruencias de hélices circulares se convertirán en parte integrante de las superficies. Si se quiere, podemos mantener la denominación de "helicoides reglados" a las superficies helicoidales regladas en las que genéricamente $\varphi(u) = c_1\, u + c_2$. Denominaremos helicoides "**cerrados**" a los helicoides cuando la congruencia de generatrices corta al eje y "**abiertos**" cuando no son coplanarios con él. Con esta denominación los helicoides alabeados cerrados serán consecuencia del movimiento helicoidal de la recta $\underline{g}(v)$ en la que $\alpha\, b - \beta\, a = 0$ siendo $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. En este caso, la línea de estricción se convierte en el propio eje **OZ** de la superficie. En los helicoide abiertos la línea de estricción se denomina "**hélice de garganta**" del helicoide (alabeado) que se convertirá en una arista de retroceso cuando es desarrollable. Obviamente no pueden existir helicoides desarrollables cerrados.

Desde el punto de vista constructivo la generación de helicoides cerrados pueden describirse por rectas que apoyándose en una hélice circular y en su eje –su línea de estricción– cumplan, además, cualquier otra condición que individualices adecuadamente la superficie. Podemos imponer, por ejemplo, la condición de que las generatrices formen con el eje un ángulo constante "θ" obteniendo los "helicoides oblicuos" si $\theta \neq \pi/2$ o los "helicoides rectos" si $\theta = \pi/2$ o bien considerar que sean al mismo tiempo conoides. En los helicoides reglados cerrados de eje **OZ** podemos situar la recta $\underline{g}(v)$ –no paralela al eje– en el plano **XOZ** y el ángulo "**u**" será el ángulo barrido desde el eje **OX**. Sin pérdida de generalidad, se obtienen todos los helicoides cerrados con la recta parametrizada en la forma $\underline{g}(v) = \{a + v,\ 0,\ \gamma\, v\}$ y la formulación de la superficie vendrá determinada por la función vectorial:

$$\underline{r}(u, v) = \{(v + a) \cos u,\ (v + a) \operatorname{sen} u,\ \gamma\, v + c_1\, u + c_2\},$$

podemos, prescindir, si se quiere, de "c_2" haciendo la adecuada traslación de ejes coordenados en dirección **OZ** con módulo c_2. La superficie quedará finalmente representada por:

((v + a) cos u, (v + a) sen u, γ v + c_1 u) = (a cos u, a sen u, c_1 u) + v {cos u, sen u, γ},
cuya línea de estricción –el eje **OZ**– se obtiene para **v = – a**.

La recta $\underline{g}$ **(v)** cuya dirección es la del vector **{1, 0, γ}** forma con el eje **OZ** un ángulo **cos** $\theta = \dfrac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$, **sen** $\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$,

γ **= cotg** θ, así que los helicoides oblicuos (figura 60) cuyas generatrices forman un ángulo constante "θ" con el eje seguirán la formulación general:
(a cos u, a sen u, c_1 u)+ v {cos u, sen u, cotg θ} con $\theta \neq \pi/2$,
y los helicoides rectos la:
(a cos u, a sen u, c_1 u)+v{cos u, sen u, 0} ($\theta = \pi/2$, $\gamma = 0$),

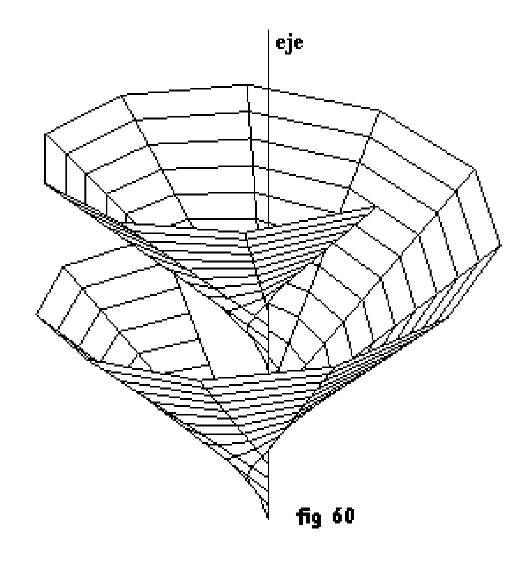


fig 60

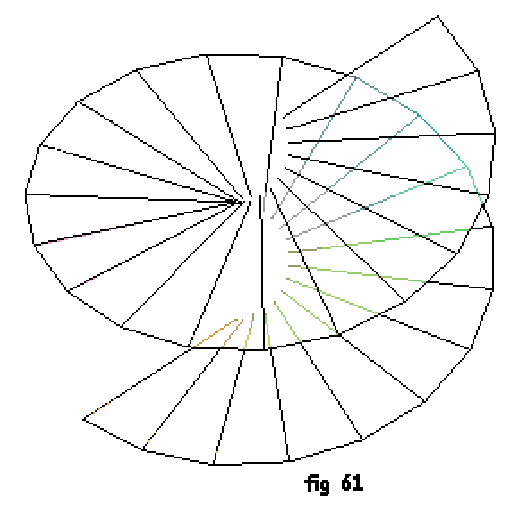
En estos últimos, las generatrices son paralelas al plano **z =0** por lo que se trata de un conoide recto cuyo eje es la línea de estricción de la superficie y eje al mismo tiempo del helicoide. Cada hélice circular **h(u)={a cos u, a sen u, c_1 u}** de eje **OZ** tiene "asociado" un único conoide recto. Puesto que se verifica $\dot{\underline{h}} \cdot \ddot{\underline{h}} = 0$, el vector $\ddot{\underline{h}}$ **={–a cos u,–a sen u, 0}** tiene directamente la dirección de la normal principal a la hélice en cada uno de sus puntos que es la dirección de las generatrices así que el helicoide recto coincide con el generado por sus normales principales.

Podemos completar este somero análisis buscando los helicoides cerrados engendrados por una hélice que sean al mismo tiempo conoides; es decir, los conoides generados por rectas que se apoyan en cualquier hélice circular **(a cos u, a sen u, c_1 u)** y en el eje **OZ (0, 0, λ)**. Las generatrices de tales superficies tendrán la dirección **{a cos u, a sen u, c_1 u –λ}** que deben permanecer paralelas al plano director **A x + B y + C z + D = 0** donde **C$\neq$ 0** para que corte al eje. Estas superficies podrán representarse mediante la parametrización:

$$(a \cos u, a \text{ sen } u, c_1 u) + v \{\cos u, \text{sen } u, -\frac{A a}{C}\cos u - \frac{B a}{C}\text{sen } u\} = ((a+v)\cos u, (a+v)\text{ sen } u, c_1 u - v(\frac{A a}{C}\cos u - \frac{B a}{C}\text{sen } u)),$$

que denominamos "helicoides con plano director" y que son, en general, helicoides oblicuos. El helicoide recto con plano director correspondiente tiene como representación, con **A = 0**, **B = 0**:
(a cos u, a sen u, c_1 u) + v {cos u, sen u, 0},
que contiene a su línea de estricción para **v = –a** y tomándola como directriz de la representación paramétrica, su parametrización intrínseca, que coincide además con su parametrización canónica, resulta ser
(0, 0, c_1 u) + v {cos u, sen u, 0} = (v cos u, v sen u, c_1 u),
que es la parametrización considerada inicialmente. Este "helicoide recto" es por lo tanto un helicoide cerrado recto con plano director y es el único conoide recto de una hélice circular. Es, así mismo, una superficie que puede generarse por reunión de las normales principales de una hélice circular (figura 61).

Esta superficie no tiene puntos singulares, no tiene puntos planos y no tiene generatrices cilíndricas sin embargo lo que hace aún más extraordinaria esta superficie es consecuencia de otras propiedades de forma. Partiendo de la parametrización $\underline{r}$ **(u, v)={v cos u, v sen u, b u}** obtenemos que **F = 0**, **e* = 0**, **g* = 0**, en todos y cada uno de los puntos de esta superficie de donde se deduce que las líneas coordenadas coinciden con las líneas asintóticas que son, además, ortogonales entre sí. En puntos hiperbólicos las direcciones principales son bisectrices de las asintóticas por lo que direcciones principales y asintóticas forman 45º entre sí. En este caso la curvatura media de la superficie en todos los puntos es nula y las curvaturas principales son iguales y de signos contrarios. Las superficies que verifican esta importante propiedad son conocidas como **superficies minimales**. Esta condición de curvatura media nula viene a significar que la estabilidad de este tipo de superficies es máxima –la energía potencial es mínima–. Toda película jabonosa sometida a presiones iguales en cada lado adopta la forma de este tipo de superficies. Una superficie mínima es una superficie en las que cada punto posee un entorno que es un pequeño fragmento de superficie de área mínima entre todos los pequeños fragmentos de superficie con el mismo borde. Toda superficie con esta propiedad es una superficie minimal aunque el recíproco no sea cierto.


fig 61

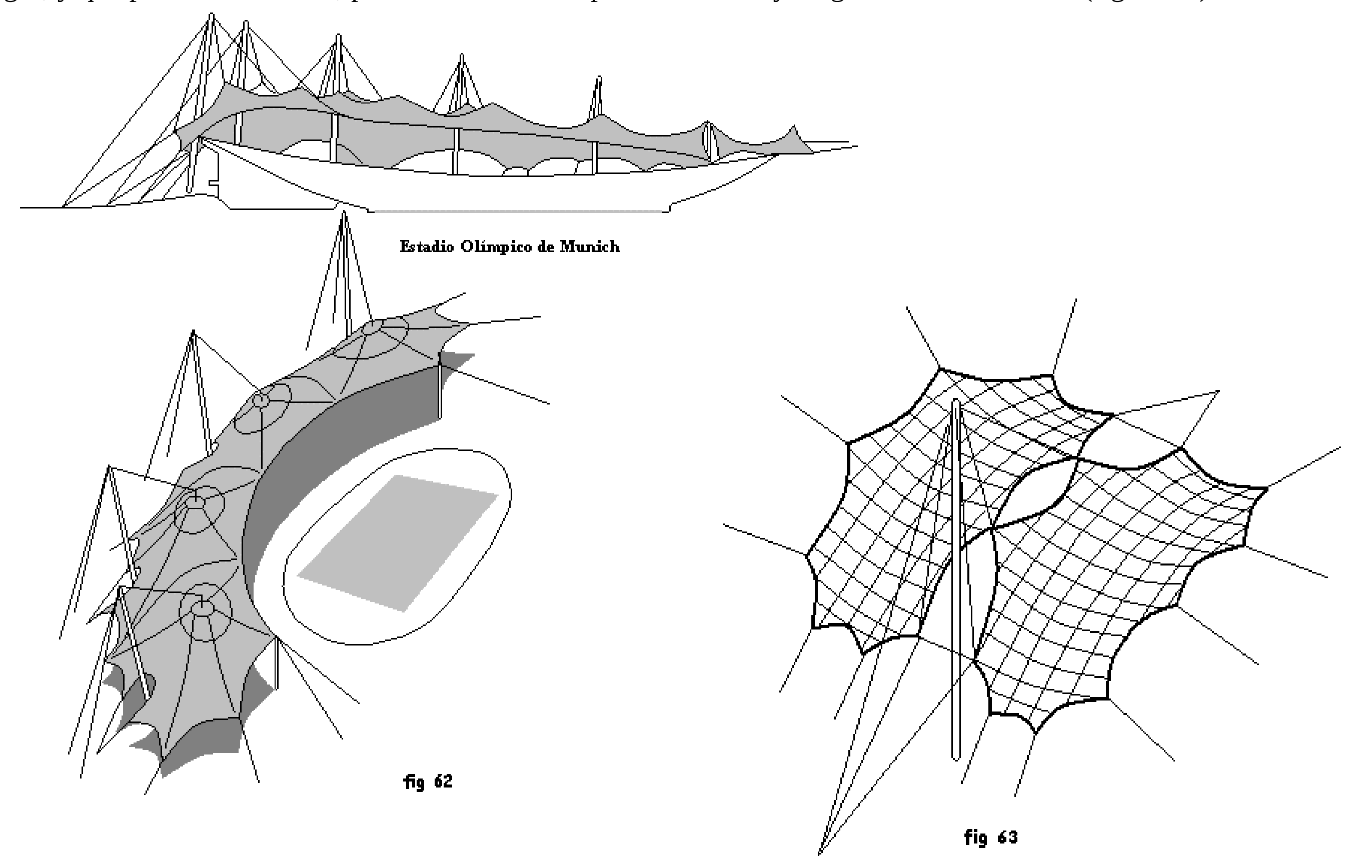
Es relativamente sencillo demostrar que el helicoide recto es la única superficie minimal reglada exceptuando naturalmente el plano. Más fácil resulta demostrar que es el único conoide recto teniendo en cuenta la propiedad de curvatura y torsión constante de las hélices circulares ya que se puede partir de que una de las familias asintóticas del conoide la forman las rectas generatrices de la superficie, en tanto sus trayectorias ortogonales deberán constituir la segunda familia de líneas asintóticas, en las que, necesariamente, su plano osculador deberá coincidir con el plano tangente a la superficie. He ahí el razonamiento seguido por Darboux en sus "*Leçons*" para las superficies regladas minimales:

“Hemos visto que toda superficie mínima está caracterizada por esta propiedad de tener en cada punto sus tangentes asintóticas rectangulares. Si la superficie es reglada, una primera familia de líneas asintóticas está formada por las generatrices rectilíneas, la segunda familia serán sus trayectorias ortogonales. Por consiguiente, todas estas trayectorias ortogonales deberán admitir a las generatrices como normales principales. Serán pues hélices trazadas sobre un cilindro circular recto y la superficie mínima será el helicoide de plano director”.

El impulsor de toda la teoría de estas superficies minimales fue el físico Plateau (Bruselas, 1801- Gante, 1883) experimentando con películas líquidas a mediados del siglo XIX. Debido a la tensión superficial, estas películas solamente permanecen en equilibrio estable cuando su área se minimiza, lo que se corresponde con un menor valor de la energía potencial. Los experimentos de Plateau se realizaron con películas jabonosas de baja tensión superficial, delimitadas por bastidores muy diversos construidos con alambre. Es fácil imaginar experimentos de este tipo, aunque técnicamente obtener la emulsión adecuada para determinadas escalas no es demasiado sencillo. El caso es que estos experimentos constituyeron el arranque del enorme interés que el tema suscitó. La dificultad de resolver matemáticamente estos problemas de forma explícita desde el punto de vista variacional, conducía a plantear teoremas de existencia para determinadas condiciones del contorno y algunos otros aspectos cualitativos de las soluciones, así que fueron los hechos materiales físicos, o sea las propias construcciones como las de Plateau, las que permitieron adelantar algunos resultados. Detrás de los experimentos surgió una gran cantidad de literatura matemática que justificaba diferentes aspectos y creaba a su vez otras expectativas. Se fueron obteniendo abundancia de diferentes teoremas que justificaban el hecho físico y que a su vez, se expandían en otros teoremas de nuevo tipo. De los orígenes físicos de esta forma de contemplar estas superficies, ha quedado la denominación de “**problema de Plateau**” al de encontrar una superficie de área mínima limitada por cualquier contorno alabeado. Los propios experimentos de Plateau, realizados con técnicas modernas, proporcionan objetos geométricos de gran interés como fuente de formas curvadas. Desde este punto de vista son representativas, por ejemplo, las obtenidas con estructuras de contornos asimilables a poliedros. El proceso tampoco resulta demasiado sencillo porque, dependiendo del contorno, el resultado puede ser una multiplicidad de hojas – incluso de un aglomerado confuso – y no una única superficie. Los experimentos con varios contornos asociados han dado lugar a la multiplicación de nuevos géneros topológicos de superficies cada vez más complicados. Finalmente, las modificaciones continuas de un solo contorno han permitido estudiar transiciones entre diferentes superficies estables y, en particular, relaciones totalmente inesperadas entre superficies.

En distintos campos relacionados con la arquitectura también se ha manifestado un cierto interés por las superficies mínimas, soluciones del problema de Plateau o sea: el uso de las películas delimitadas por contornos diversos como fuente de formas físico-geométricas de equilibrio estable y de la cubrición de espacios con membranas tensadas. Una pompa de jabón es autoformativa, sólo dependiente del contorno prefijado y de la presión interna: la tensión superficial es idéntica en todas direcciones y solamente soporta fuerzas de tracción. La forma de la película mínima es, constructivamente, la forma más ventajosa para el estado tensional y requiere gastos mínimos en material. Se han elaborado técnicas muy avanzadas para estudiar la respuesta geométrica y estructural de membranas de este tipo a los distintos condiciones de carga, y la influencia sobre la forma de distintos estabilizadores, atirantados o tensados, o la de soportes, mástiles perimetrales o intercalados. Así mismo, se ha estudiado la mayor estabilidad en el acoplamiento de superficies mínimas o el uso de superficies mínimas periódicas. Aunque hay antecedentes, el alemán Frei Otto (Chemnitz, 1925) puede ser considerado un punto de partida para la generación de arquitectos interesados en estas cubiertas, también en las formas orgánicas –que se generan bajo principios de mínimo– como fuente de formas arquitectónicas y, en general, en el uso de estructuras tensadas. Este punto de partida lo podemos situar ya en su tesis doctoral “El tejado colgante” de 1954 y en sus inmediatas construcciones posteriores cubiertas con lona –la Bundesgartenschauen, la “Tanzbrunnen”–. Son innovadores en su tiempo y muy representativos de su obra tanto el pabellón alemán en la Exposición de Montreal de 1967 como la cubierta del Estadio Olímpico de Munich de 1971 (figura 62). Su búsqueda de formas colgadas fue consecuencia del interés por las formas “naturales” como la forma de los cuerpos de algunos insectos, los huesos, la caída "natural" de las tiendas de campaña, los globos o las cometas etc. Son notables los estudios de las "cáscaras" de los crustáceos o los caparazones silíceos de unas especies muy distinguidas entre las algas como son las diatomeas, especies unicelulares, algunas de cuyas “conchas” –frústulos– resultan notables desde este punto de vista. El propio arquitecto canalizó este interés, a través del grupo “Biología y Naturaleza” (Biology & Building -1972). Toda esta parte de su trabajo y de su obra se concentra en la obtención de estructuras ligeras, las cuales, al igual que la naturaleza, minimizan el

empleo de material y permiten la consecución de una obra más diáfana. Así, mediante las membranas tensadas por cables, lograba una estructura capaz de cubrir grandes distancias, con la única ayuda de unos postes que arriostraban las cargas, y que por su colocación, permitían obtener espacios abiertos y de grandes dimensiones (figura 63).



§ 5.- Superficies generadas con tres directrices rectas

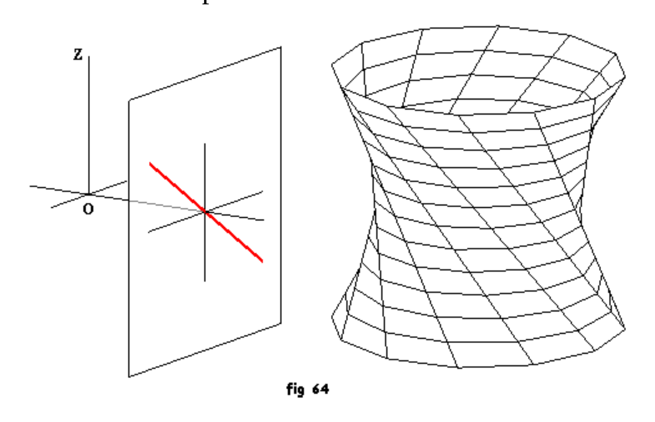
§ 5.01.- Una superficie reglada de revolución: El hiperboloide alabeado de una hoja.

La superficie que abordamos a continuación tiene propiedades bastante sorprendentes. Es el hiperboloide "de una hoja" o bien el "hiperboloide –doblemente reglado– alabeado". Vamos a limitarnos aquí a generar al más destacado de la familia de hiperboloides que es el de sección circular tanto por sus propiedades de simetría como por su amplia utilización, aunque los métodos de trazado que expondremos posteriormente sean similares para todo el conjunto.

Se puede tratar como una superficie de revolución reglada que se engendra al girar una recta alrededor del eje de rotación siendo no coplanaria con respecto a este eje y no estando contenida en un plano normal al mismo. Como es habitual utilizaremos el eje **OZ** como eje de rotación (figura 64). El conjunto de hiperboloides puede, sin perder generalidad, generarse con la recta $\mathbf{z = \alpha\, x}$, $\mathbf{y = a}$, siendo α finito y no nulo. Se obtiene así la parametrización:

$$(\mathbf{v \cos u - a \,sen\, u,\ v \,sen\, u + a \cos u,\ \alpha\, v) = (-a \,sen\, u,\ a \cos u,\ 0) + v\ \{\cos u,\ sen\, u,\ \alpha\}}$$

donde, trivialmente se toma la circunferencia $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$ en el plano $\mathbf{z = 0}$ como directriz. Esta circunferencia se determina para el valor $\mathbf{v = 0}$ de la superficie y es la denominada "**circunferencia de garganta**" por ser el paralelo de radio mínimo. La fórmula anterior define una familia de hiperboloides según los valores elegidos de "**a**" y "α" con las condiciones impuestas.



Estas superficies, con $\alpha \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{a \neq 0}$, no tienen puntos singulares, no tiene generatrices de puntos parabólicos y por lo tanto tampoco tiene puntos planos. Su línea de estricción es la circunferencia de garganta $\mathbf{(-\ a\ sen\ u,\ a\ cos\ u,\ 0)}$. Como el paraboloide hiperbólico, cualquier fragmento constituye una región de puntos hiperbólicos y no hay, por lo tanto variaciones cualitativas punto a punto en lo referente a su forma.

Para cada $\mathbf{v = v_0 > 0}$, se determina una circunferencia de radio $\sqrt{\mathbf{v_0^2 + a^2}}$ en el plano $\mathbf{z = v_0\, \alpha}$, con centro en el eje **OZ** por

encima de la circunferencia de garganta, y para un valor $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} < \mathbf{0}$ otra circunferencia similar por debajo de la misma, así que podemos generar esta superficie por rectas que se apoyen en las tres circunferencias genéricas siguientes:

$$(R_1 \cos\lambda, R_1 \operatorname{sen}\lambda, b) \quad ; \quad (R_0 \cos\theta, R_0 \operatorname{sen}\theta, 0) \quad ; \quad (R_1 \cos\mu, R_1 \operatorname{sen}\mu, -b)$$

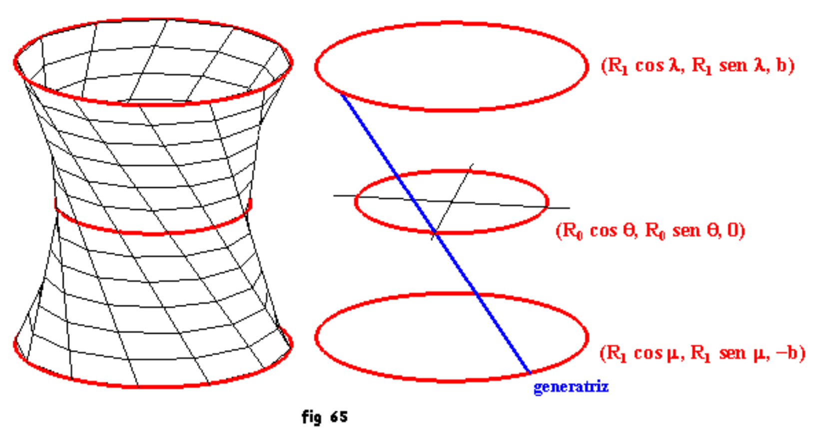


fig 65

para cualesquiera valores reales no nulos de $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_0}$, **b**, siempre que $\mathbf{R_1 > R_0}$. Las superficies quedan, de esta manera, perfectamente determinadas y constituyen la misma familia de hiperboloides obtenida por rotación anteriormente en función de los diferentes valores asignados a $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_0}$ y **b** (figura 65).

En la familia de hiperboloides

(v cos u – a sen u, v sen u + a cos u, α v)

cuya directriz es la circunferencia de garganta

<u>D</u> (u) = { – a sen u, a cos u, 0}

se pude comprobar de forma inmediata que la proyección de todas y cada una de sus generatrices sobre el plano **z = 0** son tangentes a la directriz **<u>D</u>** en su punto de contacto (figura 66/a). Si limitamos las generatrices eligiendo un círculo auxiliar de radio arbitrario mayor que "**a**", para cada segmento de tangente a la directriz limitado por la circunferencia auxiliar podemos emplazar perfectamente cada una de la familia de generatrices del paraboloide desde su proyección en planta (figura 66/b). Pero si nos centramos en esta relación entre la generatriz y su proyección sobre el plano **XOY**, encontramos que hay dos posibilidades para los segmentos tangentes a la directriz desde cada punto "**P**" de la circunferencia auxiliar (figura 67/a) o, si se prefiere, que hay otra recta que tiene la misma proyección y que también está contenida en la superficie (figura 67/b). Esta otra recta no pertenece a la familia con la que generamos inicialmente el hiperboloide. Extendiendo esta circunstancia a todas las generatrices, nos encontramos las dos familias de rectas de la superficie verificándose que cada generatriz de una familia es coplanaria con todas y cada una de las generatrices de la segunda en tanto las de cada familia se cruzan entre sí. Esta superficie resulta ser, por lo tanto, una superficie doblemente reglada como el paraboloide hiperbólico pero de unas características mucho más complejas. Cada terna arbitraria de generatrices de una de las familias tiene la propiedad de ser no coplanarias dos a dos y no paralelas a un mismo plano, es decir: tres rectas que se cruzan sin plano director. Por lo tanto cada uno de estos hiperboloides puede describirse también como generado por rectas de una familia que se apoyan en tres rectas de la otra (figura 68). Podemos generalizar este resultado diciendo que el hiperboloide alabeado es una superficie generada por rectas que se apoyan en tres rectas no coplanarias dos a dos y no paralelas a un plano, lo que no deja de resultar sorprendente, y nos lleva, inevitablemente, a buscar la parametrización en la que las líneas coordenadas sean las líneas asintóticas de la superficie, es decir en la que se verifique en todo punto $\mathbf{e^* = 0}$, $\mathbf{g^* = 0}$, que es la que manifiesta su carácter doblemente reglado (figura 69). La obtención de esta parametrización no resulta nada trivial.

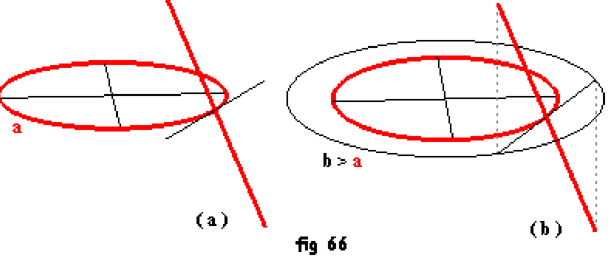


fig 66

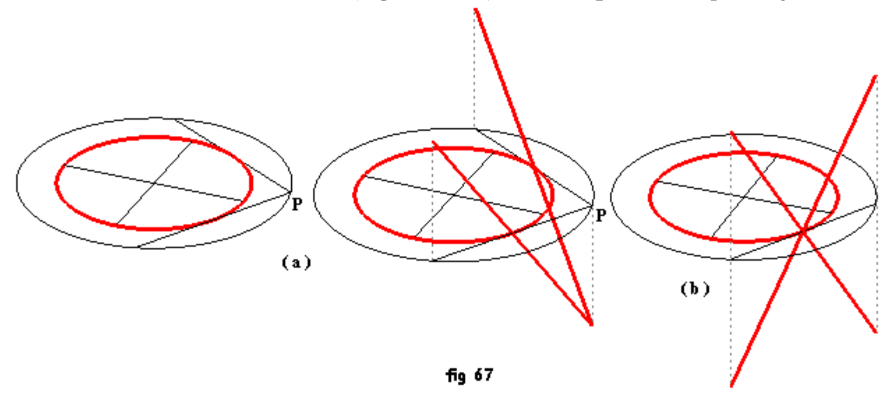


fig 67

Fragmentos del hiperboloide doblemente reglado han sido utilizados ampliamente en el campo de la ingeniería y la arquitectura y en general en el diseño de los más diversos objetos.
La imagen de las gigantescas torres de refrigeración de las centrales térmicas o nucleares son casi un icono de los mismas. Tanto la génesis del hiperboloide por rotación de uno de sus meridianos como la generación

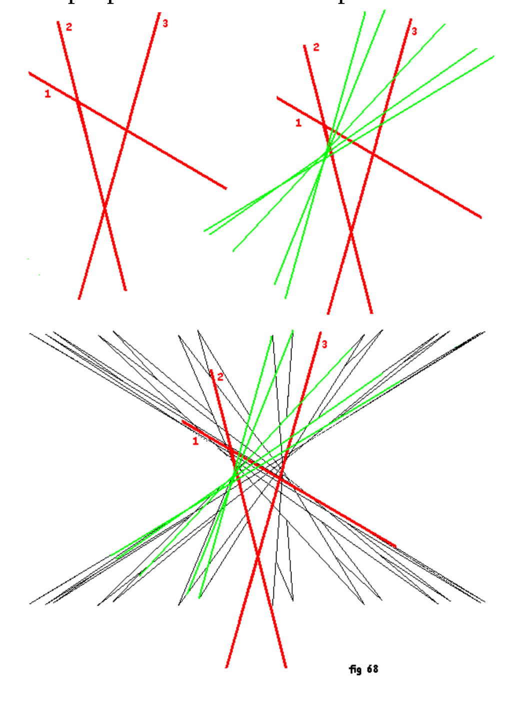


fig 68

reglada del mismo o su carácter doblemente reglado han inspirado importantes elementos constructivos.

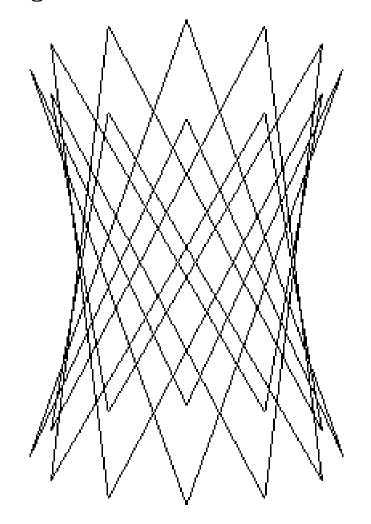


fig 69

Por sus características cabe destacar el uso del hiperboloide como cascaron para depósitos de agua, equivalente en cierto modo al uso del paraboloide hiperbólico para la cubrición de espacios. A lo largo del último siglo y más recientemente se han realizado en este sentido algunas construcciones de gran esbeltez y belleza. El de La-Roche-De-Glun (Drôme, Rhone Alpes, Francia) es una construcción artística particularmente lograda: manifiesta como rigidizadores complementarios de la lámina algunas de las generatrices de una misma familia lo que describe con toda precisión el modelo utilizado habitualmente para generar la superficie (figura 70).

Catedral Metropolitana de Brasilia - BRASIL

Sénas - FRANCIA

La Roche-de-Glun - FRANCIA

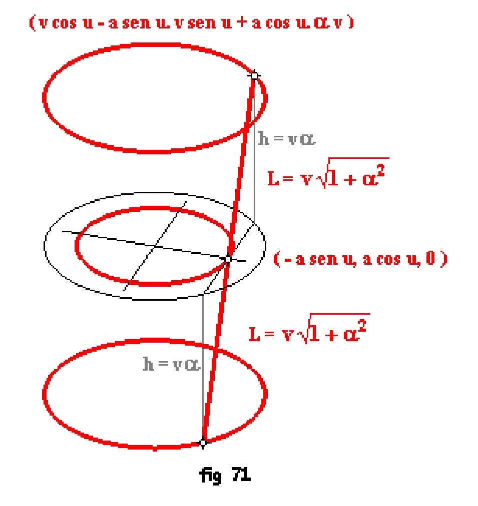
fig 70

§ 5.02.- Replanteo y trazado del hiperboloide reglado de revolución

Sobre cualquiera de los hiperboloides generados por rotación **(v cos u – a sen u, v sen u + a cos u, α v)** con las condiciones dadas encontramos sin dificultad las dimensiones de las generatrices entre cualesquiera dos meridianos. Particularmente la longitud entre la circunferencia de garganta para **v = 0** y cualquier otra directriz **v = v**, será simplemente, sobre una generatriz **u = u**, la distancia entre los puntos

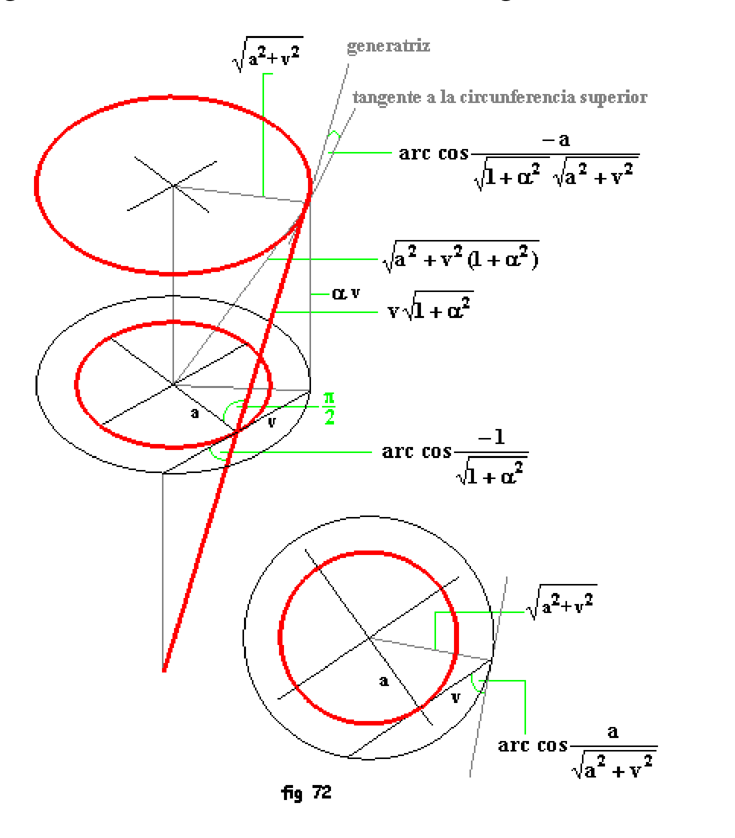
(– a sen u, a cos u, 0) y **(v cos u – a sen u, v sen u + a cos u, α v)**

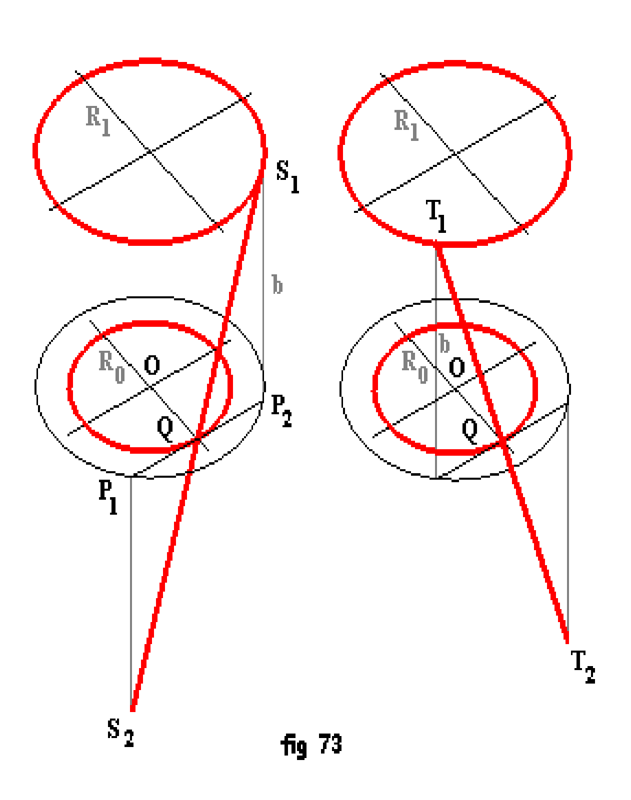
que resulta ser $\mathbf{L = v\sqrt{1+\alpha^2}}$ independiente de "**u**" y por lo tanto válida para todas las generatrices. Para reconstruir el fragmento significativo del hiperboloide entre los dos meridianos superior e inferior bastará entonces tomar segmentos de



recta de longitud **2** $v\sqrt{1+\alpha^2}$ donde **v** = **h** /α determina la altura de la circunferencia superior respecto al plano **z = 0** de la circunferencia de garganta (figura 71). Estas dimensiones y otras relativas entre la circunferencia menor en el plano de planta **XOY**, la circunferencia superior y su proyección sobre el plano de planta pueden completarse como se muestra en la figura 72.

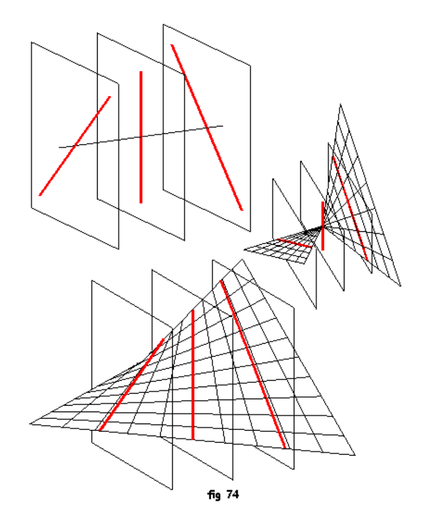
A partir de todo lo dicho para reconstruir la superficie deberemos conocer al menos el radio de la circunferencia de garganta $\mathbf{R_0}$ y fijar una segunda circunferencia, de radio $\mathbf{R_1} > \mathbf{R_0}$ para lo que nos bastará, por ejemplo, dar solamente un punto del mismo fuera de la primera. Dispuesta la circunferencia **(R_1 cos λ, R_1 sen λ, b)** siendo "**b**" la cota superior de la segunda directriz respecto del plano **z = 0**, trazaremos en este plano "de tierra" **XOY** la circunferencia de garganta **(R_0 cos θ, R_0 sen θ, 0)** y la circunferencia auxiliar proyección de la primera **(R_1 cos μ, R_1 sen μ, 0)**. En cada punto **Q** de la circunferencia de garganta trazamos la normal al radio que une el origen de coordenadas **O** con **Q**. Esta recta nos dará en su intersección con la auxiliar los puntos $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$. Podemos ahora elegir la familia de generatrices que queremos materializar por elevación vertical bien sea del punto $\mathbf{P_1}$ o bien del $\mathbf{P_2}$, cualquiera de las dos nos proporcionará, respectivamente, o bien los puntos $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ o los $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$, tal y como se muestra en la figura 73. Para trazar las siguientes generatrices de cada una de las familias seguiremos un mismo criterio.





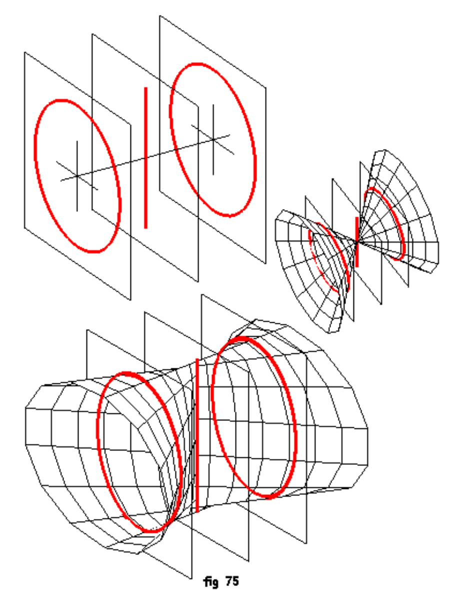
§ 6.- Cuñas generadas con tres directrices

§ 6.01.- La superficie del envase tetraédrico



La forma más general de generar superficies regladas es utilizar tres directrices. El planteamiento de esta forma de generación nos lleva a considerar al menos la compatibilidad de un sistema de ecuaciones. Esto naturalmente implica que no toda terna de directrices nos van a permitir generar una superficie bien determinada. Las superficies con plano director vistas anteriormente son, desde el punto de vista proyectivo, un caso particular de este caso más general. Ya hemos visto que el hiperboloide reglado podía ser generado con un sistema de rectas que se apoyaban simultáneamente en tres rectas determinadas, podemos también generar las cuñas estudiadas en el **§ 4.04** utilizando tres directrices convenientemente elegidas. Así mismo, se puede generar el paraboloide hiperbólico con rectas que se apoyan en

tres rectas arbitrarias no paralelas en planos paralelos siempre que excluyamos los triviales fragmentos de plano (figura 74). La cuña de Wallis, por ejemplo, puede ser también una superficie generada por rectas que se apoyan en una recta y en dos circunferencias, las tres líneas en planos paralelos de manera que la línea que une sus centros sea perpendicular a la directriz rectilínea con ambos centros a igual distancia de la misma tal y como se muestra en la figura 75 y también en este caso habría que excluir al cono con vértice en la recta directriz. Siguiendo el esquema del trazado de esta última superficie, nos planteamos ahora otra generada por dos rectas no paralelas y una circunferencia en planos paralelos, en una disposición inversa a la anterior con las dos líneas separadas a igual distancia del centro de la circunferencia sobre la perpendicular común a ambas, tal y como se representa en la figura 76. Vamos a generar de esta manera una nueva y muy interesante superficie representativa de una notable familia de la que podremos extraer algunas otras cuñas y bóvedas y considerar, por ejemplo, una bóveda de una sola arista totalmente diferente a la ya generada en la figura 41.


fig 75

Estableceremos las figuras en planos paralelos al **YOZ** y sin perder generalidad fijaremos una de las directrices **x = –a** en **y = 0**, mientras que la segunda variará su posición relativa en la forma **x = a** con **z = α y**, siendo α finito, mientras la circunferencia de radio "**R**" se sitúa con centro en el origen de coordenadas sobre la perpendicular común de ambas rectas (figura 77). En estas condiciones, las tres directrices podrán parametrizarse en la forma

$(a, \lambda, \alpha\lambda)$, $(0, R\cos\mu, R\sin\mu)$, $(-a, 0, \delta)$

con lo que las direcciones de las generatrices que pasen por ellas tomadas de dos en dos deberán ser:

$\{a, \lambda - R\cos\mu, \alpha\lambda - R\sin\mu\}$, $\{2a, \lambda, \alpha\lambda - \delta\}$, $\{a, R\cos\mu, R\sin\mu - \delta\}$

fig 76

y la condición de su equivalencia nos permite obtener $\lambda = 2R\cos\mu$, $\delta = 2R(\sin\mu - \alpha\cos\mu)$ pudiendo expresar la familia de superficies en función de "**a**" y "**α**" en la forma:

$$(0, R\cos u, R\sin u) + v\{a, R\cos u, R(2\alpha\cos u - \sin u)\} = (av, (1+v)R\cos u, R\sin u + Rv(2\alpha\cos u - \sin u))$$

habiendo tomado como directriz la circunferencia.

Las cuestiones de forma son similares para todas ellas pero la superficie representativa y la más interesante desde diferentes puntos de vista es aquella en que las direcciones de las dos rectas son perpendiculares (figura 78). se corresponde para el valor **α = 0**, es decir la superficie:

$$(0, R\cos u, R\sin u) + v\{a, R\cos u, -R\sin u\} = (av, (1+v)R\cos u, (1-v)R\sin u).$$

Esta superficie tiene cuatro puntos singulares $(a, 2R, 0)$, $(a, -2R, 0)$, $(-a, 0, 2R)$, $(-a, 0, -2R)$ situados sobre las directrices rectilíneas que son los cuatro puntos de retroceso de la línea de estricción:

$$(a(\cos^2 u - \sin^2 u), 2R\cos^3 u, 2R\sin^3 u)$$

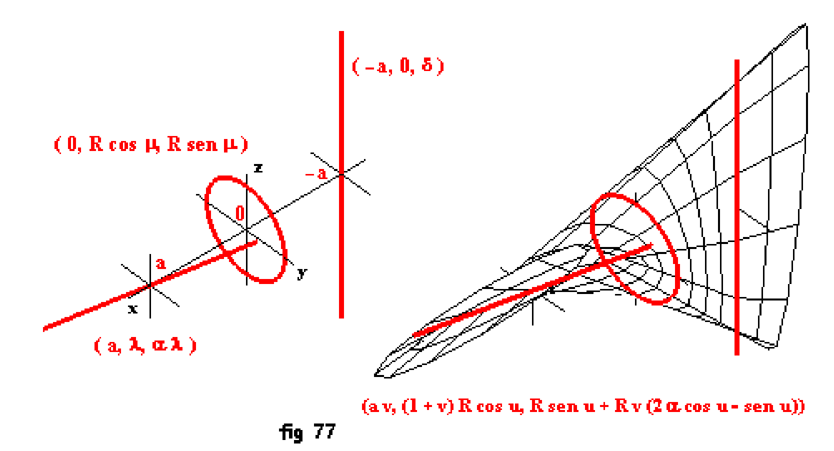


fig 77

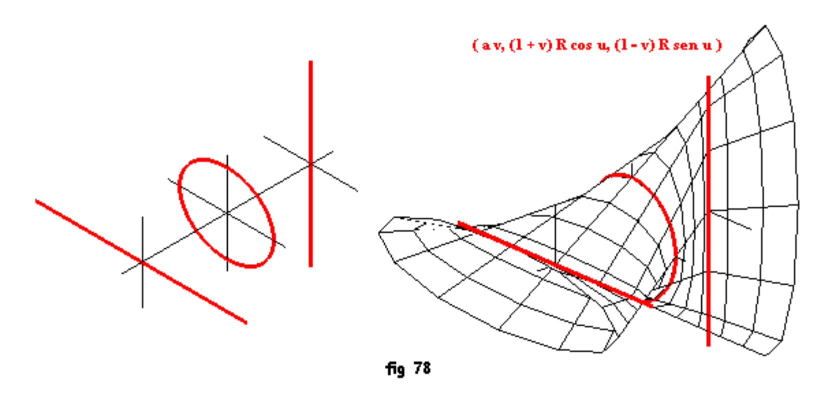
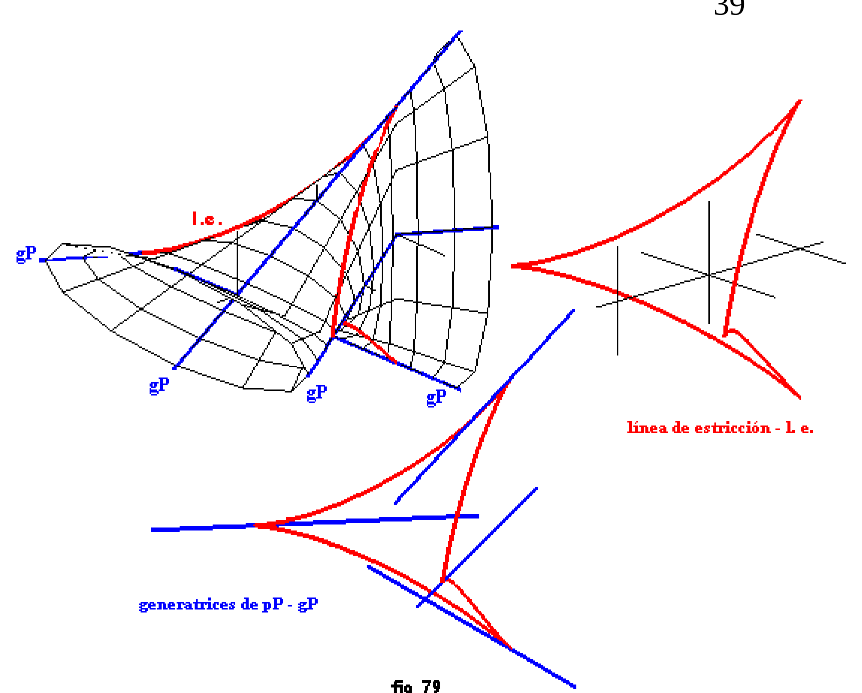
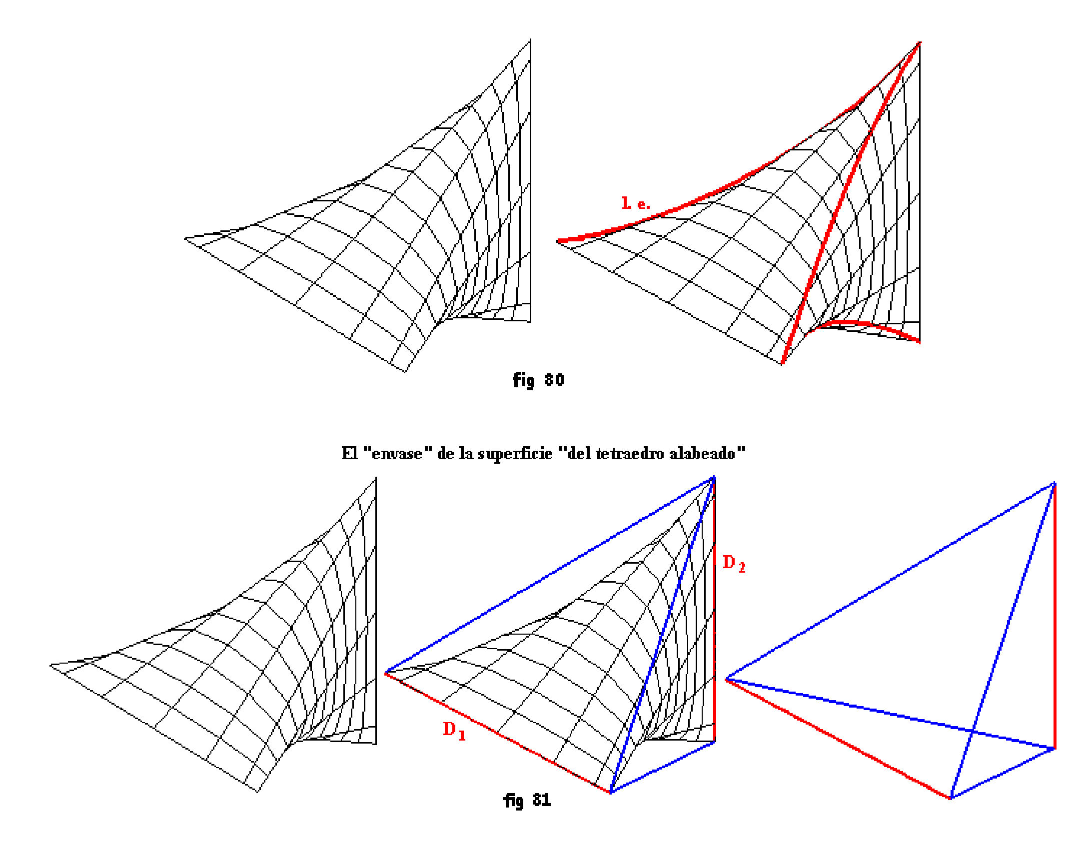


fig 78



La superficie tiene cuatro generatrices de puntos parabólicos pasando por cada uno de los singulares (figura 79) siendo, además, las únicas generatrices perpendiculares a las dos directrices rectas. Como se aprecia en la figura, la línea de estricción queda restringida a la parte central de la superficie entre las directrices rectilíneas y limitada sobre las mismas por los puntos singulares (figura 80). Esta parte central de la superficie determina una doble cuña con sus cuatro vértices en los puntos singulares definiendo un tetraedro que es su característica distintiva (figura 81) así que la podemos conocer también por la superficie del "**tetraedro alabeado**" o la del "**envase tetraédrico**".

Conservando el centro de la circunferencia sobre la perpendicular común a ambas a igual distancia de cada una de ellas, es decir considerando el conjunto de las superficies **(a v, (1 + v) R cos u, R sen u + R v (2 α cos u – sen u))**, las otras posiciones relativas entre las rectas directrices dan lugar a la "torsión" del envase. La estructura de la forma se conserva a lo largo de este proceso que podemos visualizar sobre la figura 82.



En la figura 83 se contemplan algunos de los fragmentos más significativos de esta superficie. La parte central, que se encuentra comprendida entre ambas directrices rectas es el "envase" o "tetrabrick" que ha prestado el nombre a toda la superficie. Hay también una bóveda sobre planta triangular y encontramos otros fragmentos que pueden formar bóvedas sobre diferentes cuadriláteros de planta. Algunos nos pueden recordar, a primera vista, conoides muy notorios derivados de la superficie de Wallis. Hay también otros "paraguas" y particularmente una cuña que después analizaremos.

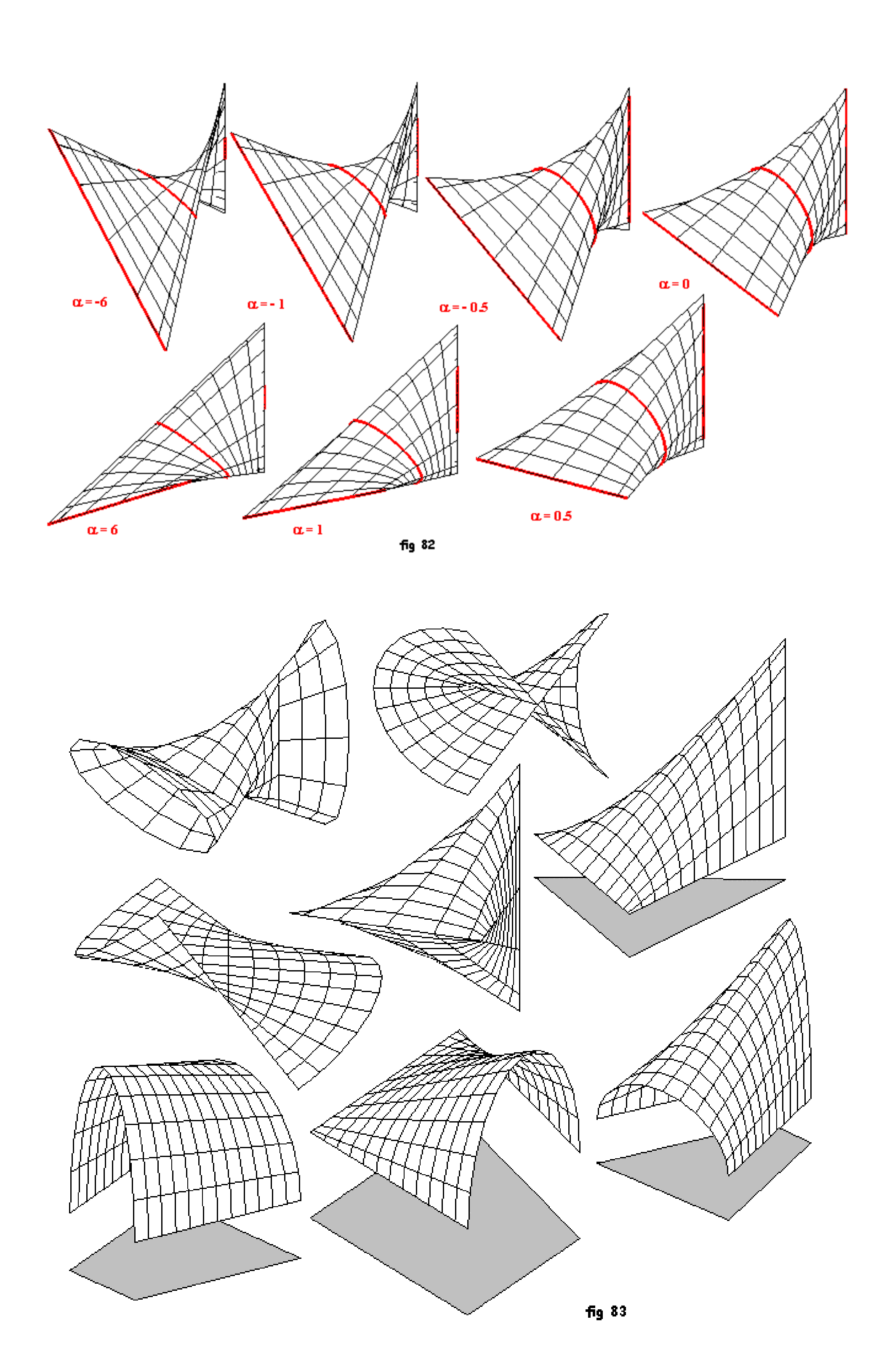


fig 82

fig 83

§ 6.02.- Replanteo y trazados en la bóveda de planta triangular

Plantearemos en primer lugar el trazado de las generatrices cuando tenemos acceso a las tres directrices con las que hemos generado la superficie. Se trata entonces de la construcción de la bóveda de medio envase sobre planta triangular disponiendo de las dos generatrices rectas y la semicircunferencia central. A pesar de no ser un conoide, esta bóveda tiene un sencillo replanteo lo que no es muy corriente. Para facilitar la visualización en el primer octante situaremos una de las directrices rectas sobre el eje **OZ** y la otra en el plano **x = 2 a**, estando la circunferencia en el plano **x = a** (figura 84/a). Las tres directrices son ahora:

$$(2a, \lambda, 0) \quad , \quad (a, R\cos\mu, R\,\mathrm{sen}\,\mu) \quad , \quad (0, 0, \delta)$$

y las direcciones de las generatrices serán

$$\{a, \lambda - R\cos\mu, -R\,\mathrm{sen}\,\mu\}\ ,\ \{2a, \lambda, -\delta\}\ ,\ \{a, R\cos\mu, R\,\mathrm{sen}\,\mu - \delta\}.$$

De su equivalencia se deduce inmediatamente que λ = **2 R cos** μ, δ = **2 R sen** μ así que para un parámetro genérico "**u**" **(≡μ)**, las tres directrices podrán venir expresadas por:

(2a, 2 R cos u, 0) , (a, R cos u, R sen u) , (0, 0, 2 R sen u)

y las generatrices por **(a (1 + v), (1 + v) R cos u, (1 – v) R sen u)**.

Comprobamos que las generatrices se proyectan sobre el plano horizontal en rectas que pasan por el origen ya que deben apoyarse en el eje **OZ**. Este punto se alcanza para el valor **v = –1** de la proyección **(a (1 + v), (1 + v) R cos u, 0)** con lo cual, siempre que dispongamos del arco central, podemos levantar las generatrices apoyándolas sobre la directriz que descansa en el plano de tierra con la construcción que se representa en la figura 84/c : uniendo el punto **A** de la directriz de planta con el origen **O** resultará una línea que corta a la proyección del arco circular en **B'** y de ahí obtenemos por elevación el punto **B** de apoyo de la generatriz. La recta **A-B** cortará al eje **OZ** en **C**. La altura **OC = 2 R sen u** siendo "**u**" el ángulo que forma la recta que une **B** con el centro de la circunferencia **(a, 0, 0)** –punto **M**– según se muestra en la figura. La distancia que une **A** con el **(2 a, 0, 0)** –punto **N**– será igual a **2 R cos u**. Se deduce que el punto **B'** separa el segmento **AO** en dos partes iguales de longitud $\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{R}^2 \cos^2 \mathbf{u}}$ y el punto **B** separa así mismo el segmento **AC** en dos partes iguales $\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{R}^2}$ (figura 84/d). Este resultado puede resultar algo sorprendente: la longitud de los segmentos de generatrices de la bóveda entre las dos directrices rectilíneas es constante y su valor es dos veces la raíz cuadrada de la suma de la distancia "**a**" al cuadrado más el radio "**R**" de la directriz circular al cuadrado. Esta conclusión hubiera podido ser obtenida directamente de la parametrización de la superficie y de su particularización para los valores que determinan las dos directrices rectilíneas. Sea como sea, se verifica, además, que las barras que materializan las generatrices entre cualquier directriz rectilínea y la circunferencia directriz son de la misma longitud. Todo esto supone una notable simplificación añadida para el replanteo de este fragmento.

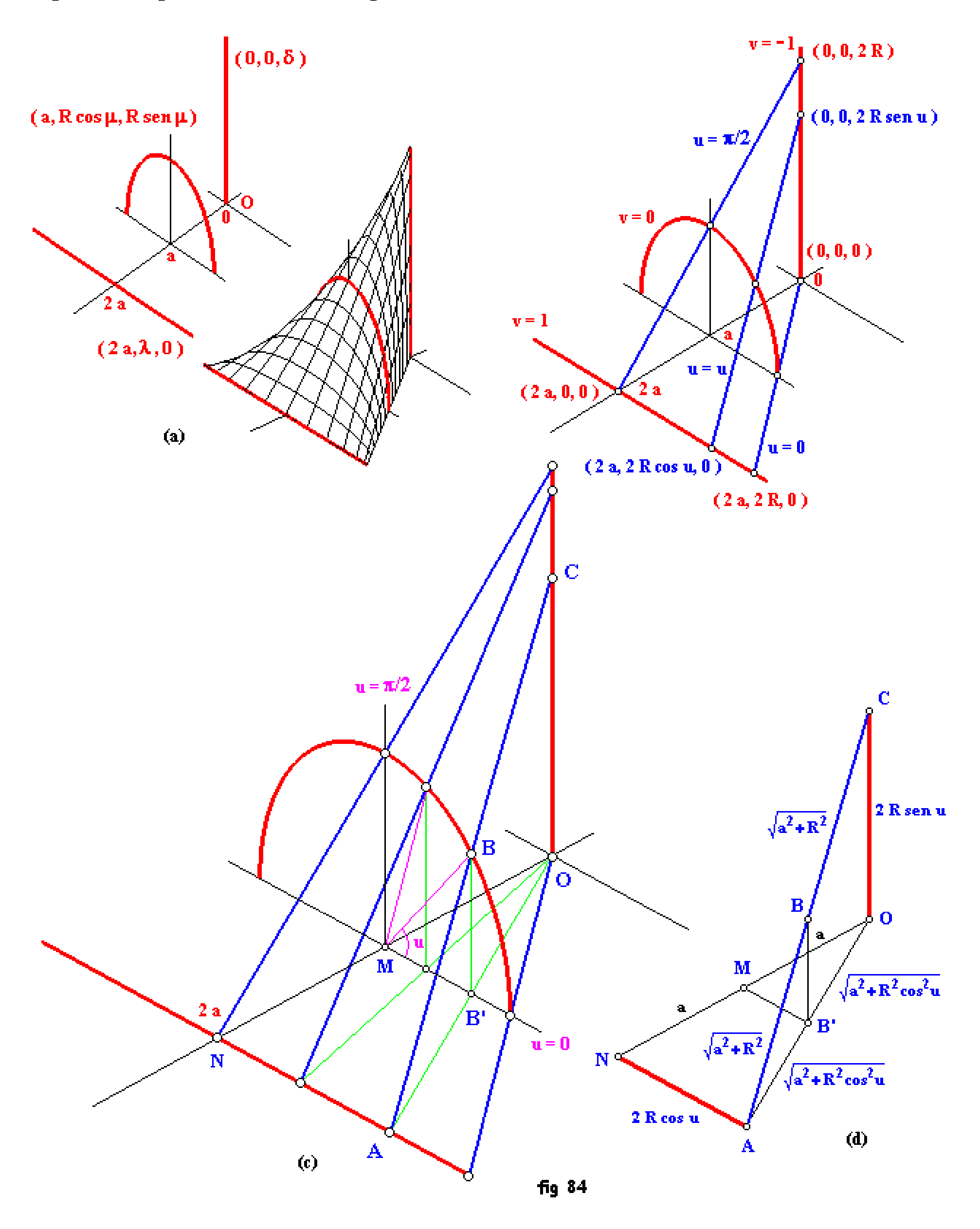
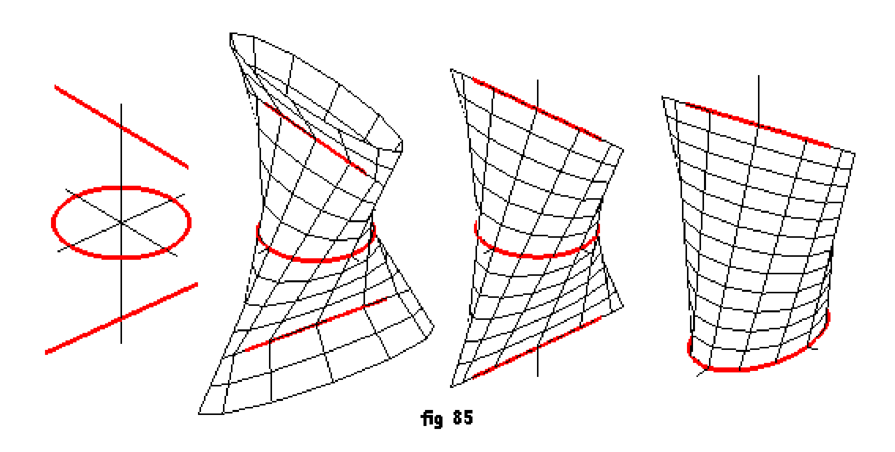


fig 84

§ 6.03.- La bóveda "de medio envase".


fig 85

Entre los fragmentos mas importantes de la superficie del envase no reflejados en la figura 83 se encuentra la mitad del envase, esto es: una bóveda de una arista sobre planta circular o, si se quiere, una cuña no conoidal. Es justamente la mitad del fragmento central de la superficie. En lo que sigue es conveniente disponer de la superficie construida en otra disposición así que lo haremos con las directrices rectilíneas **(0, λ, a)** y **(μ, 0, –a)** mientras la circunferencia se encuentra en el plano de planta **XOY** (figura 85). La superficie tendrá ahora por formulación paramétrica:

$$((1-v)\ R \cos u,\ (1+v)\ R \operatorname{sen} u,\ a\ v) = (R \cos u,\ R \operatorname{sen} u,\ 0) + v\ \{-R \cos u,\ R \operatorname{sen} u,\ a\}$$

y podemos representar el envase tetraédrico central y la bóveda de medio envase objeto de nuestra atención como se muestra en la figura 85. En la siguiente figura 86 puede verse una comparación entre la bóvedas de una arista conoidal "de Wallis" y la de la superficie "de medio envase" para las mismas posiciones relativas.

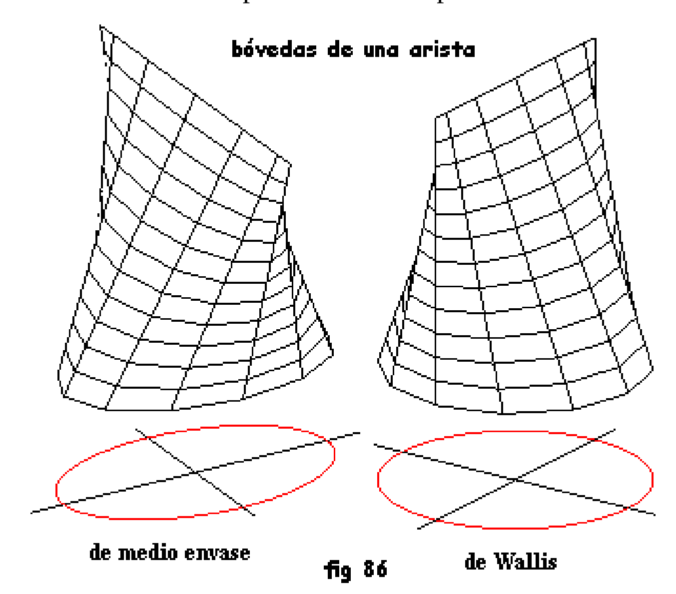


fig 86

§ 6.04.- Replanteo y trazado de las generatrices de la bóveda de medio envase

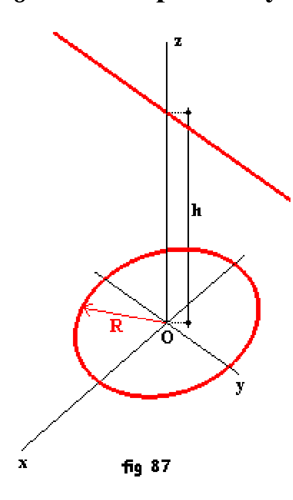


fig 87

Ya hemos visto que cuando se dispone de las tres directrices el trazado y replanteo de la superficie tiene procedimientos bastantes sencillos. En el caso de la bóveda de medio envase solo dispondremos de la circunferencia de planta y la directriz superior que juega el papel de su única arista (figura 87). Con estos dos elementos deberemos trazar las generatrices lo que no resulta, en principio, trivial. Necesitaremos previamente ampliar algunos aspectos de la superficie antes de proceder a su reconstrucción.

sabemos que los vértices del tetraedro que circunscribe el envase central de la superficie son los puntos singulares de retroceso de la línea de estricción

$$\underline{w} = \{2\ R \cos^3 u,\ 2\ R \operatorname{sen}^3 u,\ a\ (\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u)\}.$$

Esta curva se proyecta sobre el plano **XOY** en una "astroide" **($2\ R \cos^3 u$, $2\ R \operatorname{sen}^3 u$, 0)** de semieje dos veces el radio de la circunferencia directriz (figura 88). Entre los ejes coordenados, la proyección de las generatrices quedan en el interior de esta curva cerrada. La dirección de estas proyecciones **{– R cos u, R sen u, 0}** es la de la tangente a la astroide en cada uno de sus puntos. Ahora bien, una propiedad de esta curva astroidal es la de ser envolventes de segmentos de igual longitud cuyos extremos se deslizan sobre los ejes coordenados **OX** y **OY** por lo que comprobamos que la proyección **A'B'** de cualquier generatriz **AB** sobre el plano horizontal, tangente a la astroide en **T**, es constante e igual a **2R** (figura 89). Resumiendo: la proyección de cada generatriz sobre el plano horizontal queda dividida por la circunferencia directriz en dos mitades de longitud "**R**", radio de la circunferencia directriz.

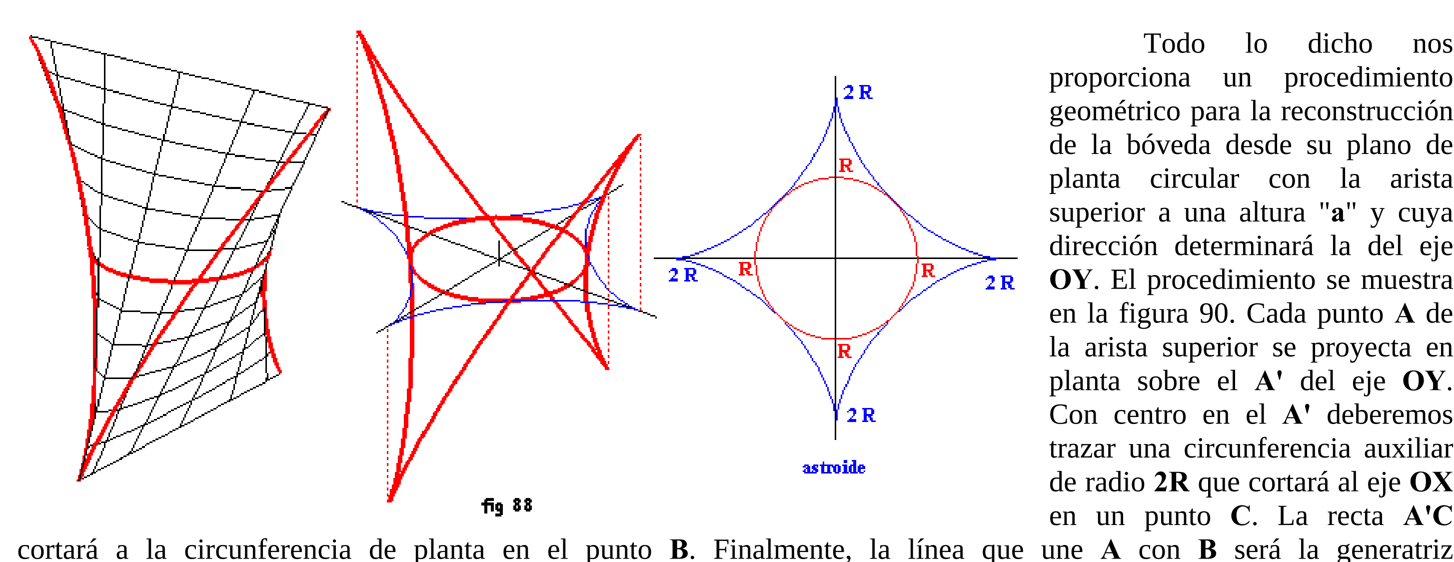


fig 88

Todo lo dicho nos proporciona un procedimiento geométrico para la reconstrucción de la bóveda desde su plano de planta circular con la arista superior a una altura "**a**" y cuya dirección determinará la del eje **OY**. El procedimiento se muestra en la figura 90. Cada punto **A** de la arista superior se proyecta en planta sobre el **A'** del eje **OY**. Con centro en el **A'** deberemos trazar una circunferencia auxiliar de radio **2R** que cortará al eje **OX** en un punto **C**. La recta **A'C** cortará a la circunferencia de planta en el punto **B**. Finalmente, la línea que une **A** con **B** será la generatriz correspondiente a cada punto **A** de la directriz. La longitud de cada segmento de generatriz de la bóveda es constante e igual a $\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{R}^2}$. La longitud constante de las barras de esta bóveda puede ser directamente deducida de sus ecuaciones paramétricas pero en cualquier caso es una característica que tal y como ocurría en la bóveda de planta triangular nos facilita extraordinariamente su reconstrucción.

fig 89

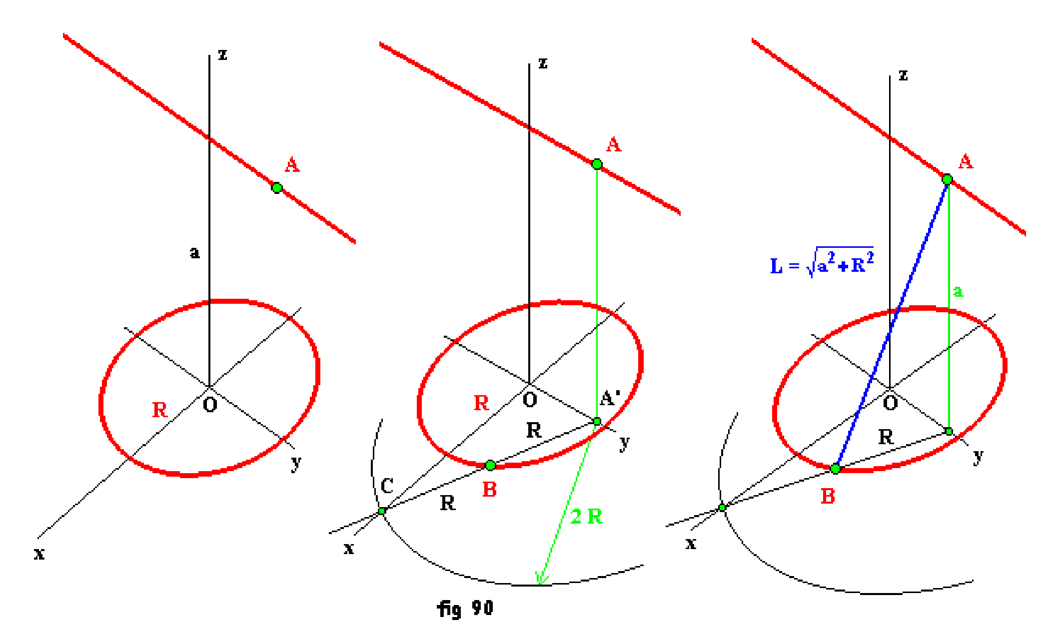


fig 90

§ 7.- Las sinusoides cilíndricas y las hojas de H. Guimard

§ 7.01.- Las "superficies" de Guimard

Hector Guimard (Lyon,1867-Nueva York,1942) es el representante más significativo y personal del *Art Nouveau* francés. Si bien es verdad que siempre se valoraron los elementos decorativos de sus obras, este arquitecto innovador, curioso, brillante y sorprendente fue olvidado después de su muerte y redescubierto después de la segunda mitad del siglo pasado. Han sobrevivido pocas de sus obras de altísimo nivel pero la que ha hecho famoso en el mundo el nombre de Guimard ha sido el diseño completo y la decoración de las entradas y edículos del metro de Paris. Desde 1890 se habían presentado numerosas ideas a la *Société Centrale des Architectes*, pero fueron finalmente estos diseños de Guimard completamente innovadores y personalísimos los que fueron sorprendentemente aceptados. Guimard diseñó íntegramente estas entradas con una decoración distinta para cada estación: líneas curvas, tallos nervados, motivos florales, mástiles, faros flexibles y en general una exuberante explosión de formas curvadas que supuso el triunfo de lo que podríamos denominar "ornamento estructural". Estos accesos que se convertirían en símbolo del "*estilo Guimard*", se convertirán también, de alguna manera, en símbolo del Paris de final de siglo y de la *Belle Époque* o de su preludio. Las entradas, muchas de ellas perdidas, fueron en su día muy admiradas por la mayor parte de los artistas innovadores y vanguardistas de su tiempo y posteriormente se han situado en la historia de la arquitectura como una obra única, excepcional, representativa de toda una época.

Entre las entradas de Guimard que, mejor o peor, han sobrevivido, hay básicamente 11 tipos distintos de los que tres son pabellones cubiertos. Teniendo en cuenta que el tejado del edículo de *Châtelet* fue reconstruido en el 2000 siguiendo otro modelo, quedan solamente dos tipos de accesos cubiertos históricos que son *Abbesses* y *Porte Dauphine*. Este último, que es monumento histórico desde 1978, posee una cubierta invertida que puede ser objeto de generalización, con distintos órdenes, en lo que denominaremos aquí "superficies de Guimard" (figura 91a y 91b).



fig 91a

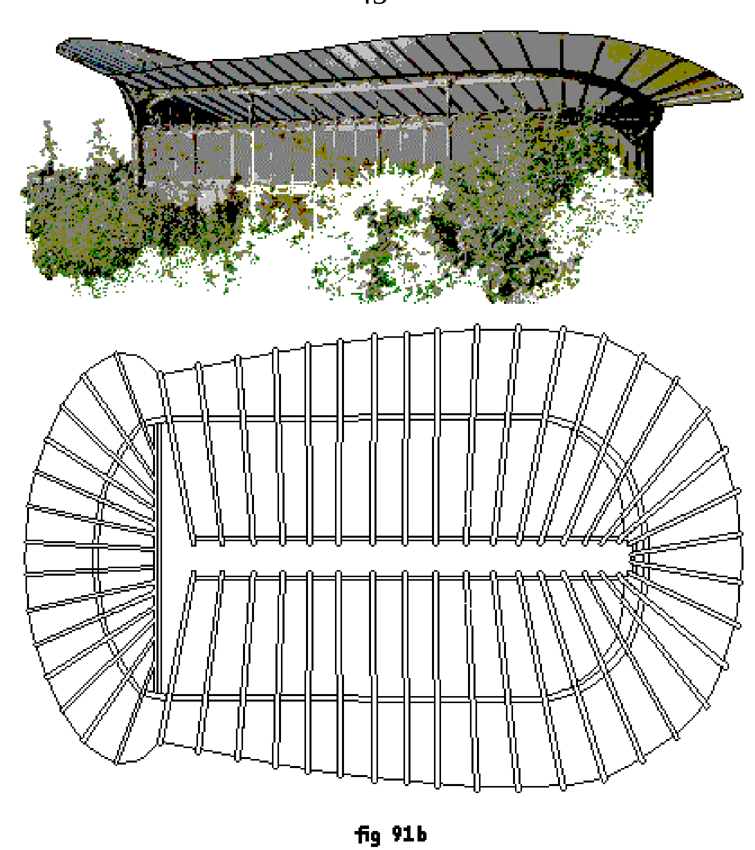


fig 91b

Se puede reconstruir circunstancialmente la cubierta invertida de la *Porte Dauphine* con mejor o peor fortuna pero lo importante no es tratar de imitarla sino analizar cuales son las características fundamentales que nos permitirían generalizar este modelo. En esencia, constituye un depósito abierto –con vierte-aguas– que puede ser generado con dos directrices. El resultado del primer análisis nos muestra que puede asimilarse a una superficie reglada engendrada por rectas que se apoyan en un segmento rectilíneo $\mathbf{D_1}$ y en otra curva $\mathbf{D_2}$ que podemos situar, por ejemplo, en un cilindro recto de sección elíptica, de manera que una de las generatrices que une un extremo de la directriz recta $\mathbf{D_1}$ se alinee con ella misma, en tanto la directriz curva en el extremo opuesto del segmento determina una línea que podemos denominar de lima-tesa –en el sentido de que puede separar las aguas en dos faldones–. Todo ello es consecuencia de su funcionalidad ya que es un recipiente que dispone de una lima-hoya corrida para permitir la recogida y salida del agua.

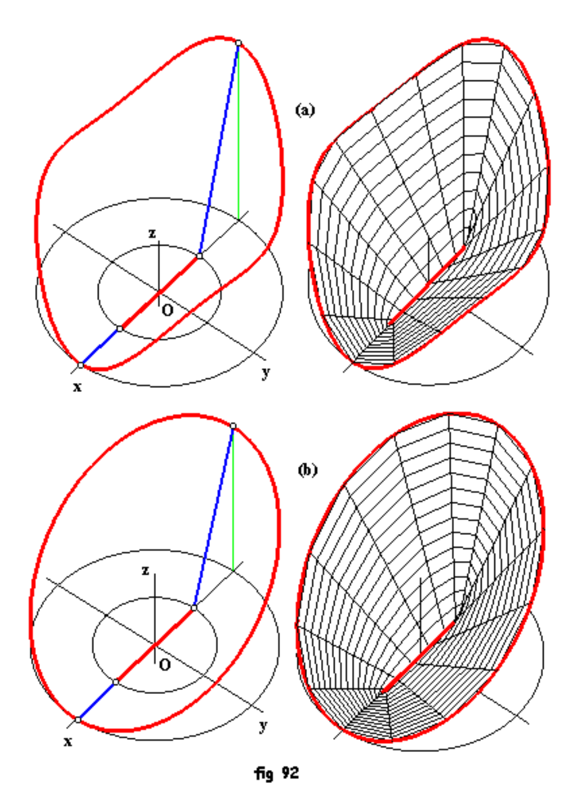


fig 92

Siendo el recorte superior un aspecto ornamental circunstancial, la génesis de tal depósito se muestra en la figura 92 donde se ha tomado un segmento situado en el eje **OX** como directriz. Mientras un extremo de cada generatriz sigue sobre el segmento un movimiento sinusoidal rectilíneo $\mathbf{(R_1 \cos u, 0, 0)}$ el otro extremo debe recorrer un movimiento de proyección elíptica o circular sobre la segunda directriz trazada sobre un cilindro que puede ser, por ejemplo, una curva alabeada o, simplemente una sección plana. En la figura 92a se ha utilizado la curva

$\mathbf{(R_2 \cos u, R_2 \operatorname{sen} u, a\,(1-\cos^3 u))}$ con $\mathbf{R_2>R_1}$

y en la figura 92b la

$\mathbf{(R_2 \cos u, R_2 \operatorname{sen} u, a\,(1-\cos u))}$ con $\mathbf{R_2>R_1}$.

Básicamente el problema es el de ajustar la directriz curvilínea de manera que la generatriz en un extremo se alinee con el segmento directriz en un mínimo de la curva para formar la línea de desagüe en tanto la opuesta forme la cumbrera en un máximo. Posteriormente puede dotarse a todo el conjunto de una leve adecuada inclinación para su uso como desagüe

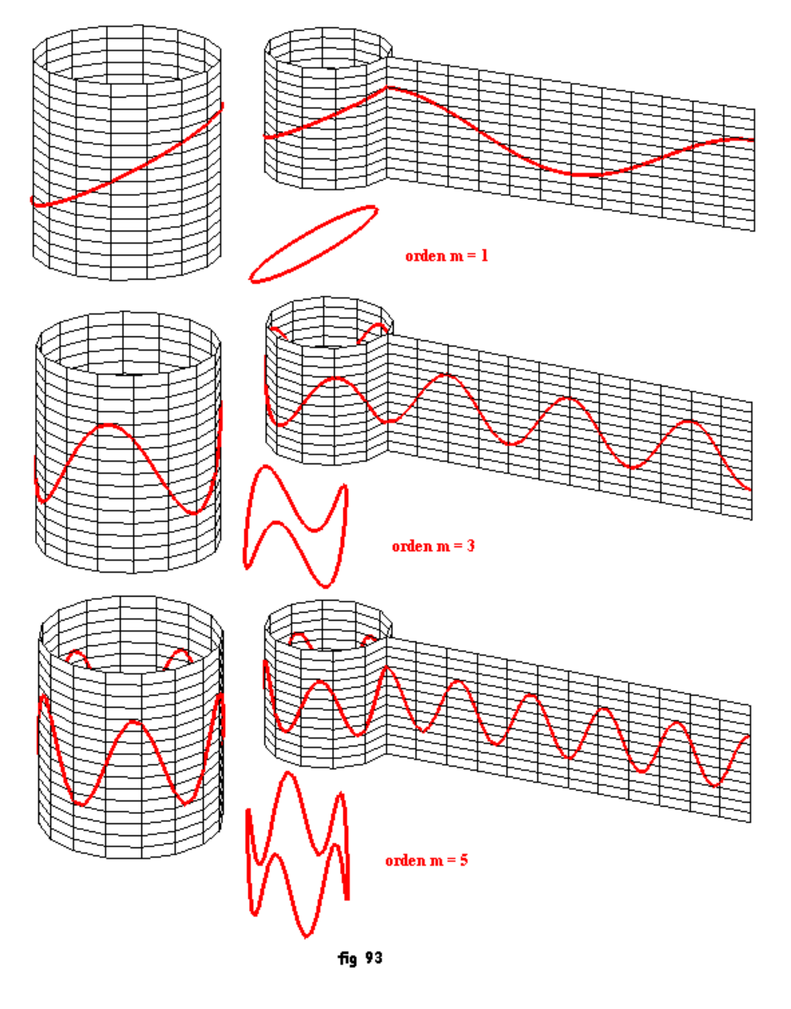


fig 93

Para tratar de generalizar este modelo vamos ahora a describir las curvas sinusoidales que se pueden trazar sobre un cilindro cuya sección normal a sus generatrices puede ser elíptica pero que aquí por simplicidad hemos tomado circular. Denominamos a estas curvas "**sinusoides cilíndricas**" y son consecuencia simplemente del adecuado arrollamiento de una curva senoidal o cosenoidal sobre un cilindro. Su representación **(R cos u, R sen u, a sen m u)** resulta ser muy elemental. El orden de la sinusoide "**m**" es el número de máximos que presenta la curva. En las curvas de órdenes pares se alinean extremales del mismo tipo así que deberemos centrarnos en la de órdenes impares en los que opuesto a un mínimo hay un máximo sobre la curva que sería una imposición del esquema de Guimard. En la figura 93 se muestran las sinusoides cilíndricas y su desarrollo para los órdenes **1**, **3** y **5** con **a = 0.5** y **R = 1.** Estas curvas, por otra parte, permiten generar diferentes superficies muy notorias como algunos de los propios conoides de Plücker con los pinzamientos o singularidades de Whitney vistos en el **§ 2.06**.

Tomado, por simplicidad **a = 1** y **R = 1** en la formulación de las sinusoides, es decir considerando la familia **r** = {**cos u, sen u, sen m**}, antes de generalizar el modelo de Guimard resulta imprescindible situar perfectamente sus puntos de mínimos sobre su proyección circular con el fin de introducir la corrección necesaria que alinee el segmento directriz con una de las generatrices formando la lima-hoya de desagüe como ocurre en la superficie de la *Porte Dauphine*. El cálculo de la situación exacta de estos máximos y mínimos puede simplificarse, si se quiere, buscando sobre la curva alabeada los puntos de torsión nula, lo que implica anular el producto mixto de las tres primeras derivadas de la función vectorial **r** que nos sirve de formulación paramétrica. El resultado del cálculo es el esperado ya que coinciden con las soluciones de las ecuaciones **cos m u = 0**. En la figura 94 se muestran estas posiciones para **m = 1, 3 y 5** y las correcciones para situar un mínimo sobre el eje **OX**. Hay que recordar que deben de ser consideradas directrices curvas con un número de mínimos **m** impares para seguir el esquema sugerido por el modelo lo que no es obstáculo para calificar como igual de interesantes geométricamente las superficies generadas con directrices **m** = par. En estas últimas, la lima-hoya generada por el segmento directriz más dos de las generatrices, atravesarán de parte a parte la superficie (figura 95)

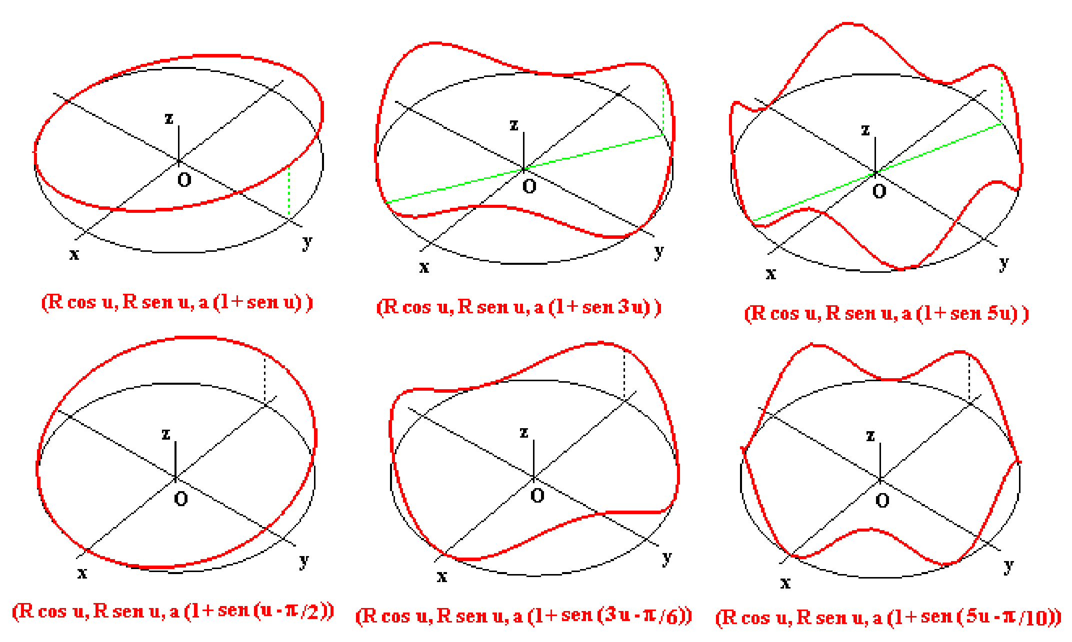


fig 94

Situado el segmento directriz sobre el eje **OX** y alineado ahora el mínimo de la corona cilíndrica obtenemos ya fácilmente las parametrizaciones adecuadas de los distintos órdenes de la superficie de Guimard. generalizando, el conjunto de parametrizaciones resultantes para **m** = impar resultan ser:

$$(R_1 \cos u + v\,(R_2 - R_1) \cos u,\ R_2\, v \,\text{sen}\, u,\ a\, v\,(1 + \text{sen}\, m\,(u - \pi/2m))$$

con $R_2 > R_1$ y cualquier peralte $a \neq 0$. En la figura 96 se representa la superficie para **m = 1** con especial atención a la formación de la lima-hoya correspondiente sumando la directriz rectilínea con su generatriz alineada. En la figura 97 se muestra la superficie para **m = 3** subrayando la estructura de los tres desagües y en la figura 98 podemos visualizar el modelo con cinco mínimos y sus correspondientes **5** líneas de recogida.

Superficies construidas con coronas cilíndricas m = 2 y m = 4

m = 2

$(R_1 \cos u + v\,(R_2 - R_1) \cos u, R_2\, v\, \text{sen}\, u, a\, v\,(1 + \text{sen}\, 2\,(u - \pi/4))$

m = 4

$(R_1 \cos u + v\,(R_2 - R_1) \cos u, R_2\, v\, \text{sen}\, u, a\, v\,(1 + \text{sen}\, 4\,(u - \pi/8))$

fig 95

fig 96

En todas las superficies de esta familia, el fragmento superior es *la hoja Guimard* que ha dado aquí origen a su estudio es un fragmento delimitado en el rango **u**∈ **[0, 2π]** , **v**∈ **[0, 1]**. Cuando ampliamos el rango de parámetros y sobrepasamos estrictamente esta fragmento superior aparecen diferentes hojas y la estructura formal de estas superficies se complica extraordinariamente y mucho más a medida que elevamos el orden "**m**" (figura 99).

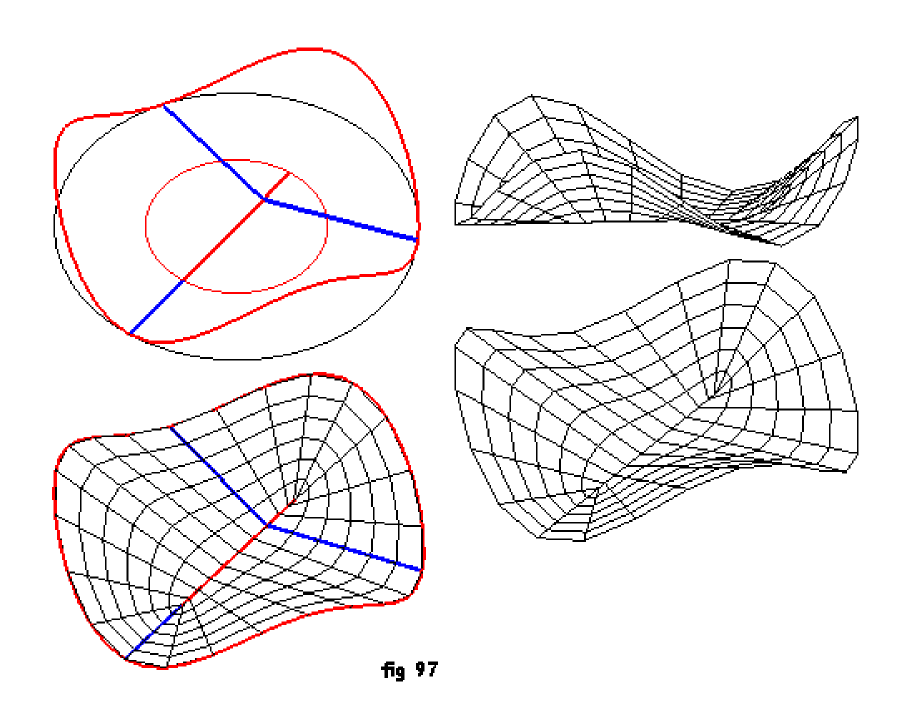


fig 97

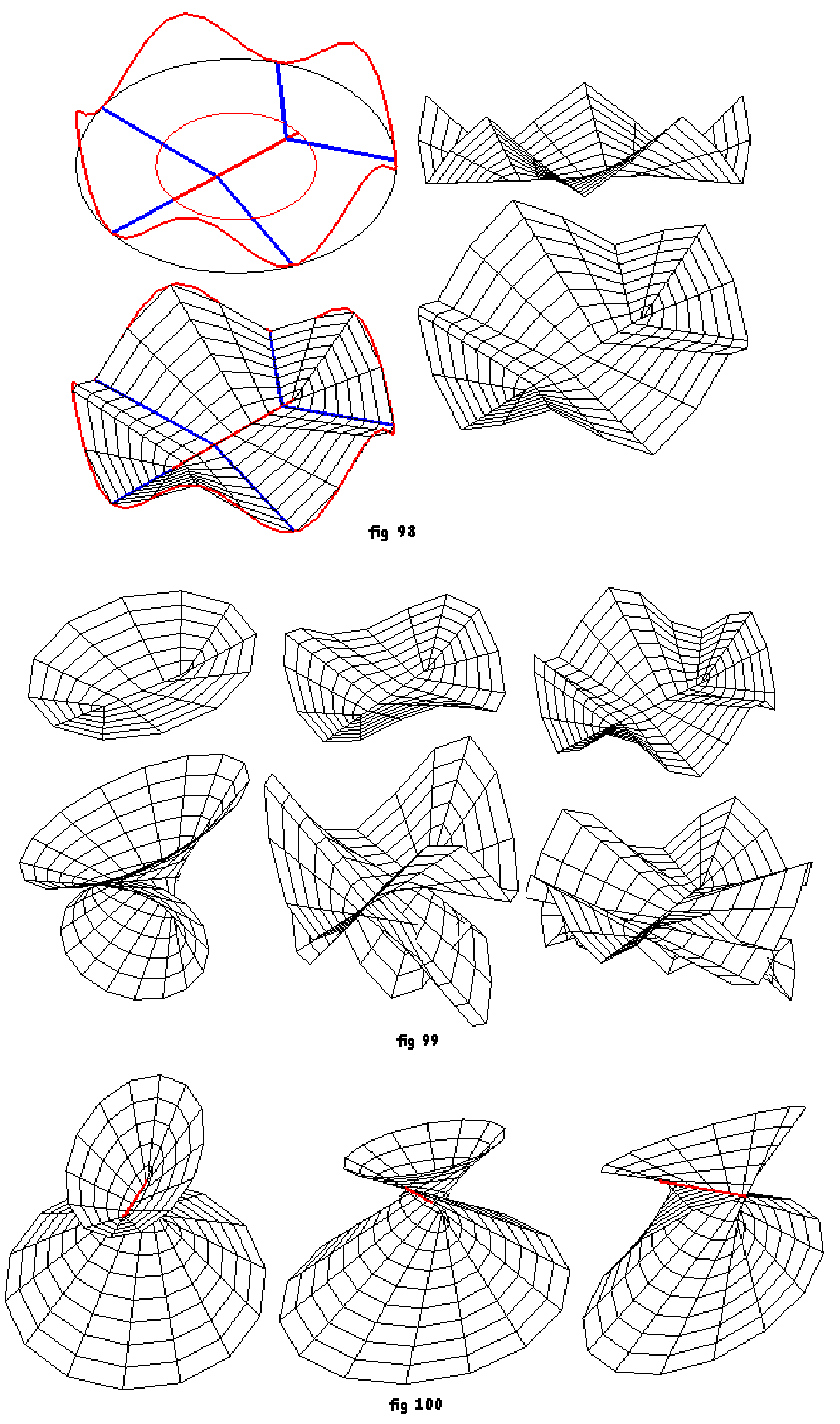


fig 98

fig 99

fig 100

La de orden **m = 1** que sigue la formulación **$(R_1 \cos u + v\,(R_2 - R_1) \cos u,\ R_2\, v \operatorname{sen} u,\ a\, v\,(1 + \operatorname{sen}(u - \pi/2))$** puede ser abordada con relativa sencillez. Presenta dos puntos singulares en los extremos del segmento directriz, uno de ellos básicamente es un "vértice", intersección de hojas, en tanto el otro es un "pinzamiento" (figura 100). La superficie no tiene puntos planos y presenta dos generatrices cilíndricas **$(R_1 + (R_2 - R_1)\, v,\ 0,\ 0)$** y **$(-R_1 - (R_2 - R_1)\, v,\ 0,\ 2\, a\, v)$** que

son la de lima-hoya y la de lima-tesa determinadas en los puntos de retroceso de la línea de estricción cuya ecuación resulta ya un tanto onerosa y no aporta ninguna otra información adicional. En la figura 101 se presentan diferentes fragmentos de la superficie en su relación con la línea de estricción y la relación de esta línea con las generatrices de puntos parabólicos.

Algo más complicado resulta el analizar la superficie correspondiente al orden **m = 3** cuya formulación paramétrica es la **(R_1 cos u + v ($R_2 - R_1$) cos u, R_2 v sen u, a v (1 + sen 3 (u – π/ 6))** cuando se consideran fragmentos que sobrepasen –inferiormente– los límites de la hoja de *Guimard*.

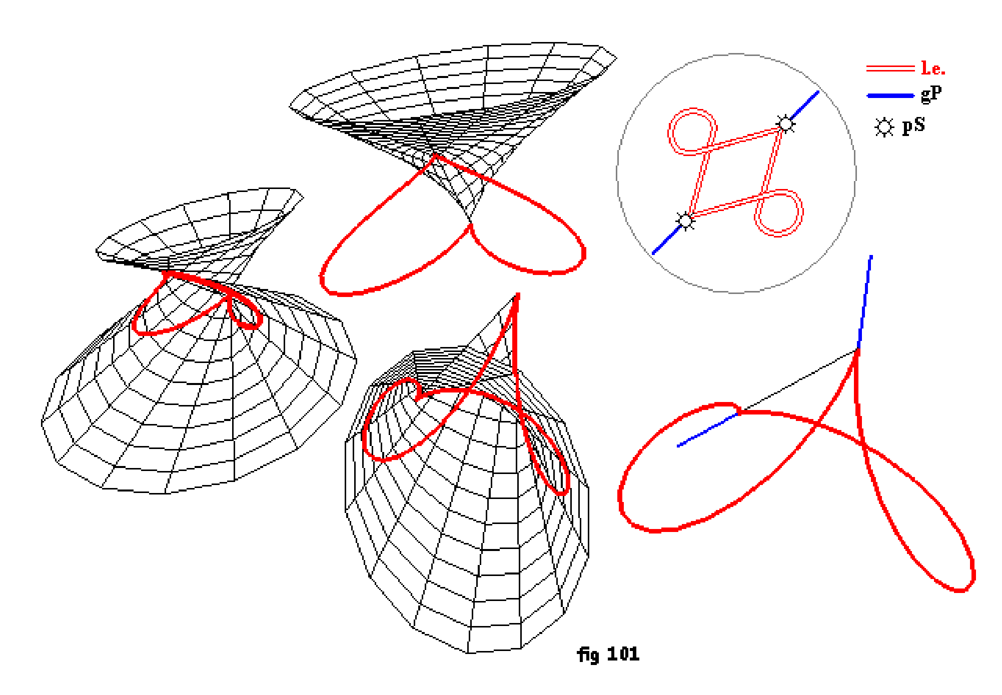
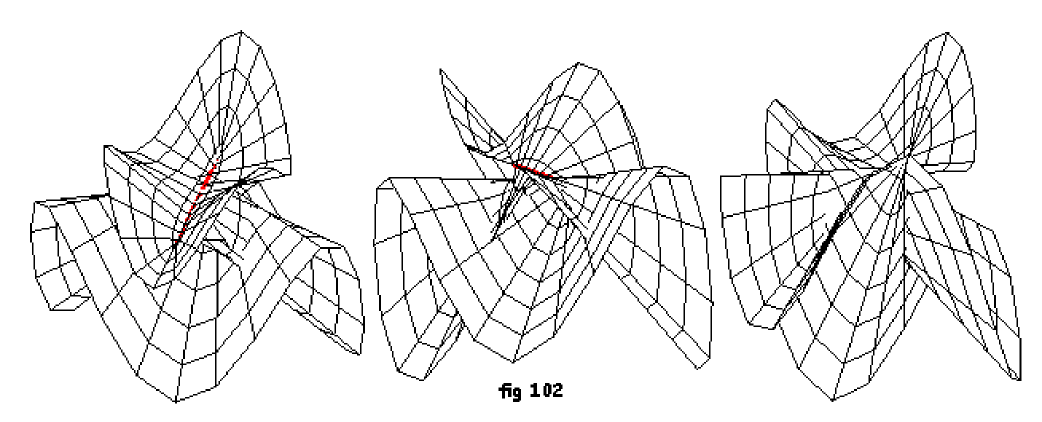


fig 101

En la figura 102 se representan diferentes vistas de esta superficie extendiendo moderadamente los parámetros para mostrar como comienzan a iniciarse inferiormente las diferentes hojas. La superficie tiene cinco puntos singulares pero solo dos de ellos sobre *el fragmento Guimard*, los otros cuatro quedan fuera de él. Existen cinco generatrices cilíndricas que pasan por los cinco puntos singulares de la superficie pero solamente hay dos de ellas en la propia hoja: una es la lima-hoya y otra la que juega el papel de lima-tesa:

$$(\mathbf{R_1, 0, 0}) + \mathbf{v}\ \{\mathbf{R_2 - R_1, 0, 0}\}\ \text{ y }\ (-\mathbf{R_1, 0, 0}) + \mathbf{v}\ \{-(\mathbf{R_2 - R_1}), \mathbf{0, 2\,a}\}.$$


fig 102

Otras dos generatrices de puntos parabólicos coinciden con las que determinan las dos lima-hoyas adicionales y pasan respectivamente por otro par de puntos singulares pero fuera de la hoja superior:

$$(-\mathbf{R_1/2, 0, 0}) + \mathbf{v}\ \{-(\mathbf{R_2 - R_1})/2,\ \sqrt{3}\ \mathbf{R_2/2, 0}\}\ \text{ y }\ (-\mathbf{R_1/2, 0, 0}) + \mathbf{v}\ \{-(\mathbf{R_2 - R_1})/2,\ -\sqrt{3}\ \mathbf{R_2/2, 0}\}$$

Finalmente hay un tercer par definido directamente sobre las hojas inferiores. Esta estructura queda un poco más clarificada analizando la línea de estricción que como en el caso **m = 1** queda fuera del *fragmento Guimard* y solamente tiene contacto con este a través de los dos puntos singulares extremos del segmento rectilíneo directriz. Todo ello puede visualizarse sobre la figura 103. Como se ve, la hoja objeto de nuestro interés es relativamente simple pero la superficie que la contiene se vuelve progresivamente más compleja a medida que aumentamos el orden **m**.

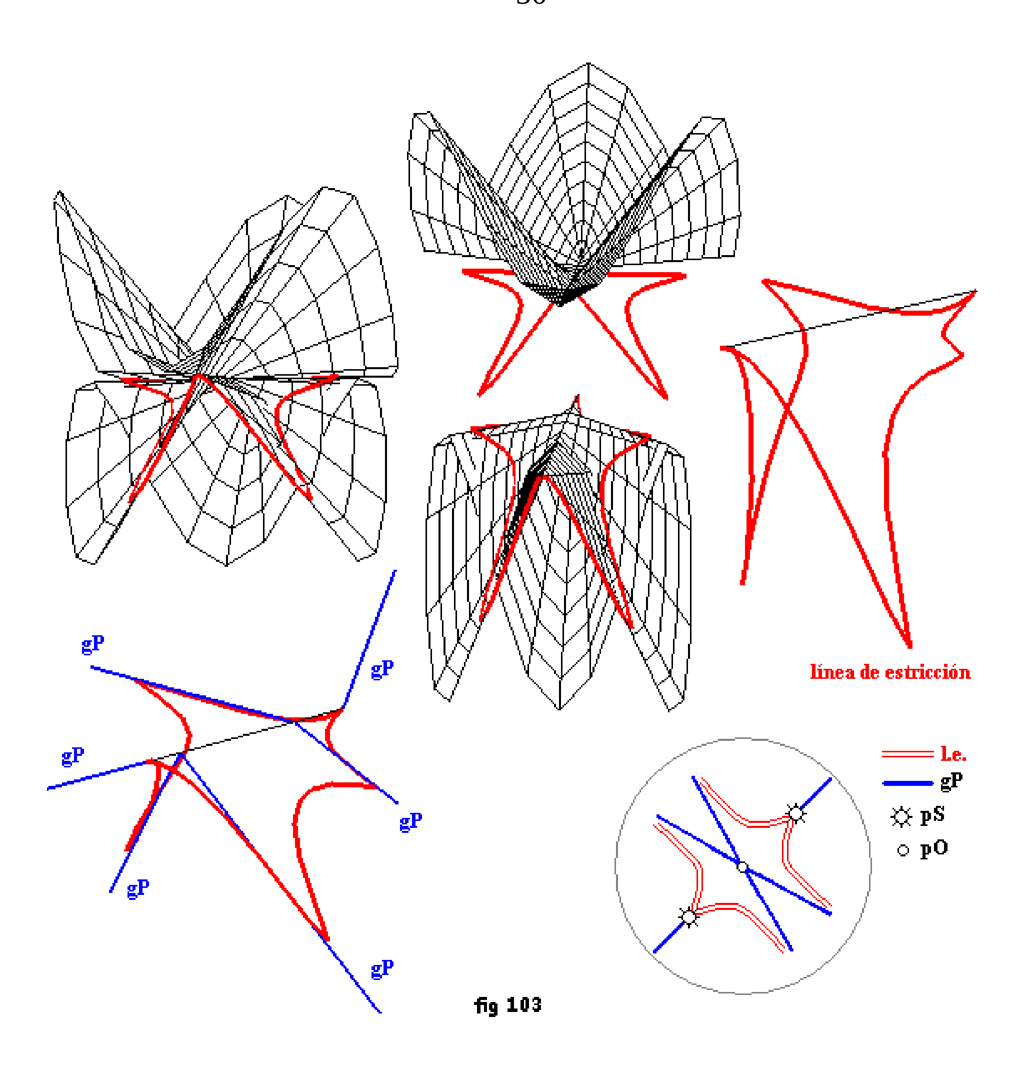


fig 103

§ 7.02.- Replanteo y trazado

A pesar de la relativa complejidad de estas superficies, el replanteo del *fragmento Guimard* resulta sencillo. Se establece en el plano de planta una circunferencia auxiliar cuyo diámetro sea el segmento directriz de longitud **D**. Esta circunferencia se traza con "**O**" en el punto medio del segmento y radio $\mathbf{R_1 = D/2}$. Por otra parte tenemos como segunda circunferencia auxiliar la proyección de la sinusoide correspondiente: una circunferencia concéntrica o, en el caso más general, una elipse. Cada punto **A** de la sinusoide cilíndrica se proyecta sobre **A'** en su circunferencia auxiliar y la unión de este punto con "**O**" determina el punto **B'** sobre la primera circunferencia auxiliar que puede proyectarse sobre el segmento directriz en **A** determinando la generatriz **AB**. En la figura 104 se visualiza esta sencilla construcción sobre una superficie **m = 3** incluyendo una de las generatrices que forman una de las líneas de los dos desagües complementarios además del alineado con el segmento directriz. La construcción es la misma para cualquier orden y, también, para coronas cilíndricas que se proyecten obre elipses. Las longitudes de las generatrices son las de los segmentos limitados entre los puntos de ambas directrices: $\mathbf{(R_1 \cos u, 0, 0)}$ y $\mathbf{(R_2 \cos u, R_2 \, sen\, u, a\,(1 + sen\, m\,(u - \pi/2m))}$, y varían entre los valores $\mathbf{R_2 - R_1}$ y $\sqrt{(\mathbf{R_2 - R_1})^2 + 4\,\mathbf{a}^2}$.

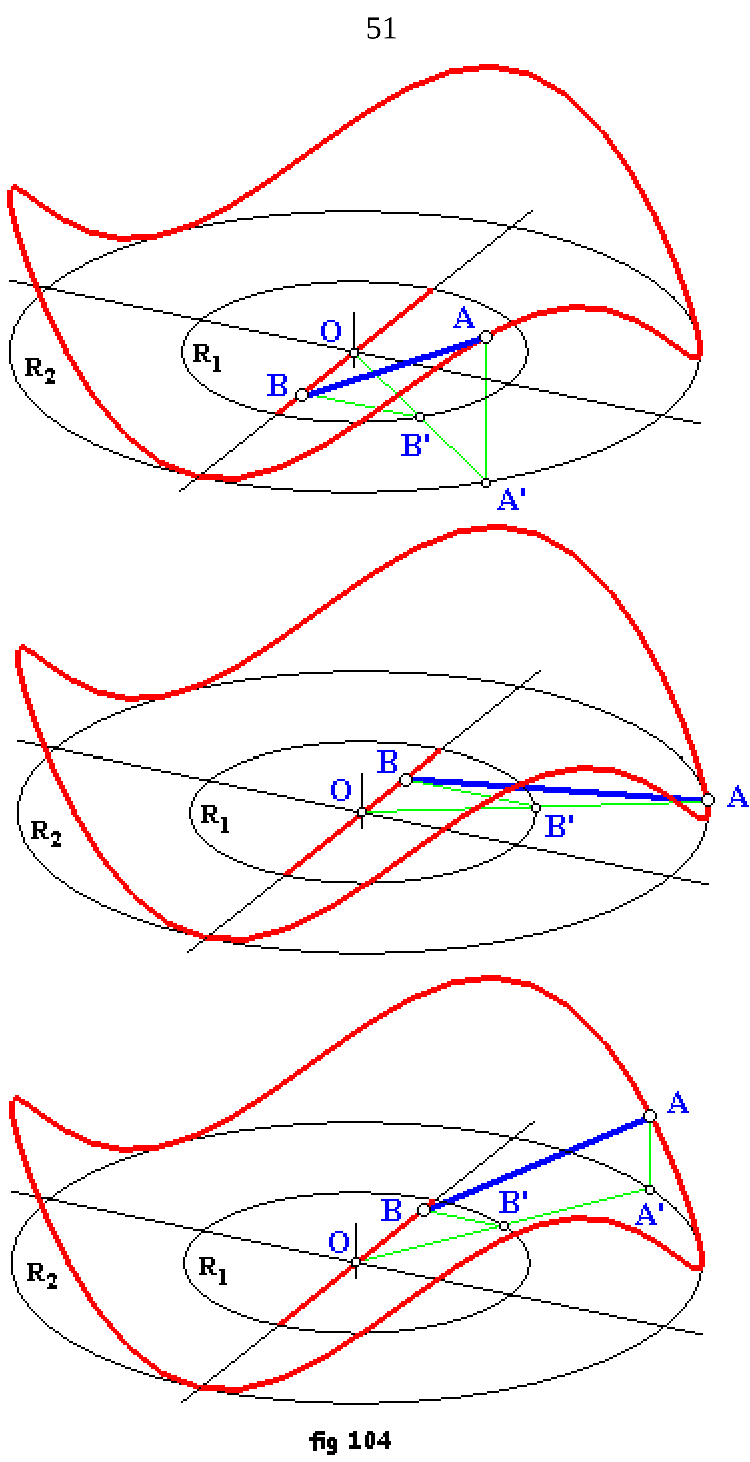
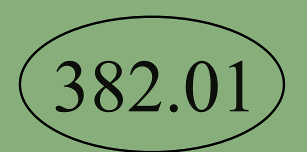


fig 104

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

